Matematikai Lapok

1993/1–2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 3. évfolyam (1993), 1–2. szám

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201–7656.

Előfizetési díj 1995-re 550 Ft+ÁFA, egyes szám ára 150 Ft+ÁFA.

* Megjegyzés: Korábbi előfizetőknek a lap ára az eddigi befizetés függvénye.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

MTESZ Házinyomda 105/96
Felelős vezető: Budai László

HILBERT TIZEDIK PROBLÉMÁJA

CSIRMAZ LÁSZLÓ

David Hilbert a századforulón a párizsi Nemzetközi Matematikai Kongresszuson 23 problémát sorolt fel, melyek megoldását az eljövendő századtól várta. Ezek közül a tizedik a következő volt: adjunk meg olyan eljárást (algoritmust), amely minden egész együtthatós (többváltozós) polinomról eldönti, van-e a polinomnak nem-negatív egészekből álló gyökrendszere. Ebben a jegyzetben azt mutatjuk meg, hogy Hilbert várakozásával ellentétben ilyen algoritmus nem létezik.

Tekintsünk egy $n+m$-változós, egész együtthatós $p(\overline{x},\overline{y})$ polinomot. Az $\overline{y}$ változókat *paramétereknek* tekintjük, és ezek rögzitése után megnézzük, hogy a polinomnak az $\overline{x}$ változókban van-e nem-negatív egészekből álló megoldása. Álljon R_p pontosan azokból az $\overline{y}$ paraméterekből, melyekre ilyen megoldás létezik. Ezzel R_p egy természetes számok m-eseiből álló halmaz, vagyis egy *reláció* lesz. Az ilyen típusú relációkat *diphantikus relációknak* nevezzük, s ezek vizsgálata vezetett végül is a fenti eredményhez.

Egy természetes számokon értelmezett és természetes számot felvevő függvény *rekurzív*, ha kiszámítható, azaz ha létezik olyan Turing-gép, ami minden inputra megáll és éppen a függvény értékét számítja ki. A rekurzív függvények sok más ekvivalens definíciója közül mi a következőt fogjuk használni.

Definíció. *Rekurzív függvények* az $\omega^n \to \omega^m$ függvények legszűkebb részosztálya, mely egyrészt tartalmazza a következő függvényeket:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x+y && \text{összeadás} \\ f(x,y) &= x\cdot y && \text{szorzás} \\ f(x_1,\ldots,x_n) &= x_i && \text{projekciófüggvények} \\ f(x,y) &= \begin{cases} 1 & \text{ha } x\ge y, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} && \text{a} \ge \text{karakterisztikus függvénye} \end{aligned}$$

másrészt zárt a kompozícióra és a μ-operációra, azaz ha $f(\overline{x},u)$ egy $(n+1)$-változós rekurzív függvény úgy hogy minden $\overline{x}$-hez van olyan u amivel $f(\overline{x},u)=0$, akkor

$$g(\overline{x}) = \mu u\big(f(\overline{x},u)=0\big) \stackrel{\text{def}}{=} \min\big\{u\in\omega \,:\, f(\overline{x},u)=0\big\}$$

szintén rekurzív.

Csakúgy mint itt, a későbbiekben is ω jelöli a természetes számok halmazát. Egy ω^n-en értelmezett R reláció rekurzív, ha karakterisztikus függvénye, azaz $\chi_R(\overline{x}) = 1$ ha $\overline{x} \in R$ és $\chi_R(\overline{x}) = 0$ ha $\overline{x} \notin R$, rekurzív. R *rekurzívan felsorolható*, ha R éppen egy rekurzív függvény értékkészlete. Megjegyezzük, hogy minden rekurzív reláció egyúttal rekurzívan felsorolható is, de fordítva nem: van ω-nak rekurzívan felsorolható, de nem rekurzív részhalmaza.

Egy függvény *parciálisan rekurzív*, ha értelmezési tartománya ω^n valamely részhalmaza, és előáll egy rekurzív függvényből a μ-operáció alkalmazásával, ahol is nem követeljük meg, hogy minden $\overline{x}$ inputra létezzen megfelelő u érték.

A nevezetes *Church-tézis* azt mondja ki, hogy minden (elvben) kiszámítható függvény rekurzív. A tézis számos következménye közül az egyik legnevezetesebb, hogy nincs algoritmus (vagyis kiszámítási eljárás), ami minden Turing-gépre megmondaná, hogy az véges sok lépésen belül megáll-e vagy sem (megállási probléma).

Visszatérve Hilbert 10. problémájához, az 50-es évek elejére *Julia Robinson* bizonyította, hogy amennyiben az $f(n,k) = n^k$ kétváltozós függvény diophantikus, akkor minden rekurzív függvény is az. Ebből viszont már következik, hogy a Hibert által keresett algoritmus nem létezik — amit úgy szokás kifejezni, hogy *Hilbert tizedik problémája megoldhatatlan* (lásd 7. Következmény). Annak igazolása, hogy n^k valóban diophantikus, további 20 évet váratott magára, ez *J. Matijasevics* tétele.

A bizonyításhoz elsőként néhány definíciót vezetünk be, majd pár egyszerű állítást igazolunk.

Definíció. Az $R \subset \omega^n$ reláció *diophantikus*, ha van olyan $n+m$-változós egész együtthatós $p(\overline{x}, \overline{z})$ polinom, hogy minden $x_1, \ldots, x_n$ nem-negatív egész számra $\overline{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in R$ akkor és csak akkor, ha vannak olyan nem-negatív egész $z_1, \ldots, z_m$ számok, hogy $p(\overline{x}, \overline{z}) = 0$.

Definíció. Az $f : \omega^n \longrightarrow \omega$ függvény diophantikus, ha az $\{\langle \overline{x}, y \rangle \in \omega^{n+1} : f(\overline{x}) = y\}$ reláció diophantikus.

1. Állítás. *Az* $=$, $\neq$, $\leq$, $<$ *diophantikus relációk, a* $+$, $\cdot$, id *diophantikus függvények.*

Bizonyítás. Az alábbi átírások alkalmazásával:

$$\begin{aligned}
x = y &\quad\Leftrightarrow\quad x - y = 0 \\
x \leq y &\quad\Leftrightarrow\quad (\exists z \geq 0)\, x + z - y = 0 \\
x \neq y &\quad\Leftrightarrow\quad (\exists z \geq 0)\, (x-y)^2 - 1 - z = 0 \\
x < y &\quad\Leftrightarrow\quad (\exists z \geq 0)\, x + z + 1 - y = 0 \\
x + y = z &\quad\Leftrightarrow\quad x + y - z = 0 \\
x \cdot y = z &\quad\Leftrightarrow\quad x \cdot y - z = 0.
\end{aligned}$$

■

2. Állítás. *Ha $R_1 \subset \omega^n$ és $R_2 \subset \omega^n$ diophantikus relációk, akkor $R_1 \vee R_2$ $(= R_1 \cup R_1)$ valamint $R_1 \wedge R_2$ $(= R_1 \cap R_2)$ is azok.*

Bizonyítás. Legyen $\overline{x} \in R_1 \Leftrightarrow (\exists \overline{z} \geq 0)\, p(\overline{x}, \overline{z}) = 0$ valamint $\overline{x} \in R_2 \Leftrightarrow (\exists \overline{u} \geq 0)\, q(\overline{x}, \overline{u}) = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\overline{x} \in R_1 \cup R_1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists \overline{z} \geq 0)(\exists \overline{u} \geq 0)\, p(\overline{x}, \overline{z}) \cdot q(\overline{x}, \overline{u}) = 0, \\
\overline{x} \in R_1 \cap R_1 \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists \overline{z} \geq 0)(\exists \overline{u} \geq 0)\, p^2(\overline{x}, \overline{z}) + q^2(\overline{x}, \overline{u}) = 0.
\end{aligned}$$

Ezek alapján az állítás közvetlenül adódik. ■

3. Állítás. *Ha f_1 és f_2 diophantikus függvények, akkor $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$ és $f_1 \circ f_2$ (kompozíció) is azok.*

Bizonyítás. Definíció szerint $(f_1 + f_2)(\overline{x}) = y \Leftrightarrow \exists y_1 \geq 0 \exists y_2 \geq 0 \Big(f_1(\overline{x}) = y_1 \wedge f_2(\overline{x}) = y_2 \wedge y_1 + y_2 = y \Big)$. A feltétel szerint a zárójelben diophantikus relációk állnak, így azok metszete is diophantikus. Hasonlóan bizonyítható a többi eset is. ■

Világos, hogy minden diophantikus függvény egyúttal parciálisan rekurzív is, és hogy a diophantikus relációk rekurzívan felsorolhatók. Láttuk, hogy az alapfüggvények, melyekből a (parciálisan) rekurzív függvényeket felépíthetjük, diophantikusak, továbbá hogy a diophantikus függvények köréből az összeg, szorzat és kompozícióképzés nem vezet ki. Így annak igazolásához, hogy minden parciálisan rekurzív függvény egyúttal diophantikus is, elegendő az alábbi tételt igazolnunk:

4. Tétel. *Ha az $f : \omega^{n+1} \to \omega$ függvény diophantikus, akkor a $g(\overline{x}) = \mu u(f(\overline{x}, u) = 0)$ szintén diophantikus.*

Mielőtt a tétel bizonyítására rátérnénk, nézzük néhány következményét. Elsőként az előbb megfogalmazott ekvivalenciát mondjuk ki.

5. Következmény. *Egy függvény akkor és csak akkor parciálisan rekurzív, ha diophantikus.*

Bizonyítás. A függvény felépítésére vonatkozó indukcióval. ■

Kleene első normálforma tétele azt mondja ki, hogy minden n-re létezik univerzális rekurzíve felsorolható reláció, azaz olyan $U_n \subset \omega^{n+1}$, hogy minden rekurzív $R \subset \omega^n$-re található olyan $r \in \omega$, hogy $R = \{\overline{x} \in \omega^n : \langle \overline{x}, r \rangle \in U_n\}$.

6. Következmény (Univerzalitási tétel). *Van olyan $p(x, r, \overline{z})$ egész együtthatós polinom, hogy minden rekurzíve felsorolható $R \subset \omega$ relációhoz található $r \in \omega$, hogy $x \in R \Leftrightarrow (\exists \overline{z} \geq 0) p(x, r, \overline{z}) = 0$.*

7. Következmény (Hilbert tizedik porblémájának megoldhatatlansága). *Legyen $p(x, r, \overline{z})$ egy univerzális polinom. Ekkor nem létezik olyan algoritmus, amely minden $r \in \omega$-ra eldöntené, hogy a $p(r, r, \overline{z}) = 0$ diophantikus egyenletnek van-e megoldása a nem-negatív egész számok körében.*

Bizonyítás. Ha mégis volna ilyen algoritmus, akkor a Chuch-tézis értelmében az

$$R = \{r \in \omega \ : \ \text{a } p(r, r, \overline{z}) = 0 \text{ nem oldható meg } \overline{z} \geq 0\text{-val}\}$$

halmaz szintén rekurzív volna, így a p univerzalitása miatt volna $r \in \omega$, hogy

$$x \in R \quad \Leftrightarrow \quad p(x, r, \overline{z}) = 0 \text{ megoldható } \overline{z}\text{-ben.}$$

Itt $x = r$-et téve kapjuk, hogy

$$p(r, r, \overline{z}) = 0 \text{ megoldható} \quad \Leftrightarrow \quad p(r, r, \overline{z}) = 0 \text{ nem olható meg,}$$

ami nyilván ellentmondás. ■

Nem nehéz belátni (lásd a feladatokat), hogy van negyedfokú univerzális polinom. Így Hilbert tizedik problémája már negyedfokú polinomokra sem oldható meg. Ugyanakkor ismeretes algoritmus, mely tetszőleges első- és másodfokú polinom esetén megmondja, van-e a polinomnak egész gyöke vagy sem (ez C. L. Siegel 1972-es eredménye). Harmadfokú polinomokra a kérdés nyitva van.

Más oldalról az univerzális polinomok változóinak számát vizsgálhatjuk. Jól ismert, hogy egy egyváltozós egész együtthatós polinom egész gyöke (ha van) osztója a konstans tagnak, így egyváltozós polinomokra is létezik eldöntő algoritmus. J. Robinson és J. Matijasevics konstruált 13 ismeretlenes univerzális polinomot, ennek fokszáma azonban igen magas, nagyobb mint $10^{10^{10}}$. A következő fokszám-változószám párok mellett ismert univerzális polinom: (4,153), (6,129), (8,108), (10,107), (20,86), (44,83), (1952,80). Az ismert legkisebb lehetséges változószám kilenc: 9-változós polinomok olyan sorozatát lehet megadni, melyekre nem létezik eldöntő algoritmus. A hiányzó $2, 3, \ldots, 8$ esetekre szinte semmi sem ismert.

Az univerzális polinom létezésének egyik meglepő következménye, hogy elegendően nagy q-ra (például $q \geq 14$ megteszi) a legalább q tényezős szorzatra felbontható számok halmaza, vagyis az

$$\{x \in \omega : \exists z_1 \geq 0 \ldots \exists z_q \geq 0 \ x = (z_1 + 2)\cdot(z_2 + 2)\cdot \cdots \cdot(z_q + 2)\}$$

reláció definiálható q-nál kevesebb paraméterrel is.

Az 5. következmény bizonyítása – könnyen látható módon – formalizálható a Peano axiómarendszerben. Mivel egy reláció akkor és csak akkor rekurzíve felsorolható, ha van azt definiáló Σ_1 formula, azonnal adódik az alábbi

8. Következmény. *Minden $\varphi(\overline{x})$ Σ_1 Peano formulához található olyan $\psi(\overline{x},\overline{z})$ kvantormentes (prím) formula, hogy $PA \vdash \varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \exists z_1 \ldots \exists z_m \psi(\overline{x},\overline{z})$.*

Más szavakkal a Σ_1 formulák ekvivalensek az ún. egzisztenciális formulákkal, melyekben egyátalán nem szerepel korlátos kvantor. Az aritmetikai hierarchia felépítésében így a Σ_n, Π_n formulákban $n \geq 1$-re feltehetjük, hogy nem szerepel korlátos kvantor.

Most rátérünk a 4. tétel bizonyítására. Legyen tehát a $p(\overline{x},u,y,\overline{z})$ egész együtthatós polinom olyan, hogy minden $\overline{x} \in \omega^n$, $u, y \in \omega$ mellett

$$f(\overline{x},u) = y \text{ akkor és csak akkor, ha } (\exists \overline{z} \geq 0) p(\overline{x},u,y,\overline{z}) = 0.$$

Legyen $g(\overline{x}) = \mu u(f(\overline{x},u) = 0)$. A μ operáció definíciója alapján adott $\overline{x} \in \omega^n$ és $u \in \omega$ esetén $g(\overline{x}) = u$ pontosan akkor áll fenn, ha $f(\overline{x},u) = 0$, továbbá minden $0 \leq v < u$ esetén $f(\overline{x},v)$ definiálva van és 0-tól különböző, azaz értéke $y+1$ valamilyen $y \geq 0$-ra. Így $g(\overline{x}) = u$ pontosan akkor, ha

$$(\exists \overline{z} \geq 0) p(\overline{x},u,0,\overline{z}) = 0 \wedge (\forall v < u)(\exists \overline{z} \geq 0)(\exists y \geq 0) p(\overline{x},v,y+1,\overline{z}) = 0.$$

Ahhoz, hogy g valóban diophantikus függvény legyen, elegendő az itt szereplő diszjunkció második tagjáról megmutatni, hogy diophantikus reláció. A jelölések egyszerűsítése érdekében az y változót a $\overline{z}$ paraméterek közé soroljuk, és a szereplő (most már) $n+1+m$-változós polinomot P-vel jelöljük. Így azt kell igazolnunk, hogy a következő $n+1$-változós reláció diophantikus:

$$R = \left\{ \langle \overline{x},u \rangle \in \omega^{n+1} : (\forall v < u)(\exists \overline{z} \geq 0) P(\overline{x},v,\overline{z}) = 0 \right\}.$$

Legyen $\langle \overline{x},u \rangle \in R$ tetszőleges de rögzített. Ekkor persze minden $0 \leq v < u$-hoz van olyan $\overline{z} \in \omega^m$, melyre $P(\overline{x},v,\overline{z}) = 0$, jelöljük az egyik ilyet $\overline{z}^{(v)}$-vel, és legyen z az összes $\overline{z}^{(v)}$-ben szereplő természetes szám mindegyikénél nagyobb. Vegyük ω^m-nek mindazokat a $\overline{t}$ elemeit, melyekre $\overline{t} < z$, azaz $\overline{t}$-nak mind az m eleme kisebb z-nél, és legyen M olyan nagy, hogy $v < u$ és $\overline{t} < z$ esetén

$$\left| P(\overline{x},v,\overline{t}) \right| < M,$$

továbbá $u < M$ és $z < M$ is teljesül.

Ha most $b_0, b_1, \ldots, b_{u-1}$ páronként relatív prím, M-nél nagyobb egész, akkor a kínai maradéktétel értelmében van olyan $c > 0$ egész, melyre

$$c \equiv v \pmod{b_v} \quad v = 0,1,\ldots,u-1.$$

Továbbá ha $\overline{z}^{(v)}$ elemeit $z_1^{(v)}, z_2^{(v)}, \ldots, z_m^{(v)}$ jelöli, akkor vannak olyan $a_1, \ldots, a_m$ pozitív számok is, hogy

$$a_1 \equiv z_1^{(v)} \pmod{b_v} \qquad v = 0,1,\ldots,u-1$$

$$\ldots$$

$$a_m \equiv z_m^{(v)} \pmod{b_v} \qquad v = 0,1,\ldots,u-1.$$

Ekkor természetesen $P(\overline{x}, c, \overline{a}) \equiv P(\overline{x}, v, \overline{z}^{(v)}) = 0 \pmod{b_v}$, ahol $\overline{a} = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$, tehát a $b_0 \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{u-1}$ szorzatot s-sel jelölve

$$P(\overline{x}, c, \overline{a}) \equiv 0 \pmod{s}.$$

Az $a_j - z_j^{(v)}$ különbség osztható b_v-vel, a $z_1(v), \ldots, z_m^{(v)}$ mindegyike kisebb z-nél, ezért a $\prod_{i<z}(a_j - i)$ szorzat osztható a relatív prím b_v-k szorzatával, s-sel is. Ezzel igazoltuk a következő lemma első felét:

9. Lemma. *$\langle \overline{x}, u \rangle \in R$ akkor és csak akkor, ha vannak olyan M, z, s, c és $a_1, \ldots, a_m$ nem-negatív egészek, melyekre*

(i) *minden $v < u$ és $\overline{t} < z$ esetén $|P(\overline{x}, v, \overline{t})| < M$, továbbá $2u+3 < M$ és $z < M$;*

(ii) *s felbontható u darab páronként relatív prím szám, $b_0, \ldots, b_{u-1}$ szorzatára úgy, hogy mindegyik tényezőnek van M-nél nagyobb prímosztója, továbbá minden $v < u$-ra $c \equiv v \pmod{b_v}$;*

(iii) *minden $j = 1, \ldots, m$-re $\prod_{i<z}(a_j - i)$ osztható s-sel;*

(iv) *$P(\overline{x}, c, \overline{a}) \equiv 0 \pmod{s}$.*

Bizonyítás. A fentebb mondottak értelmében elegendő a megfordítást igazolni. Legyen $0 \leq v < u$ esetén p_v a b_v-nek M-nél nagyobb ((ii) szerint létező) prímosztója, és $j = 1, 2, \ldots, m$-re $z_j^{(v)}$ éppen a_j-nek p_v-vel való osztásakor adódó maradék, végül $\overline{z}^{(v)} = \langle z_1^{(v)}, \ldots, z_m^{(v)} \rangle$. Ekkor (iv) alapján

$$P(\overline{x}, v, \overline{z}^{(v)}) \equiv 0 \pmod{p_v}$$

hiszen p_v osztója s-nek és $c \equiv v \pmod{b_v}$, ezért ez a kongruencia mod p_v is fennáll. (iii) szerint $\prod_{i<z}(a_j - i)$ osztható b_v-vel, ezért p_v-vel is, tehát a_j-nek p_v-vel való osztásakor a maradék csak $0, 1, \ldots, z-1$ közül kerülhet ki, vagyis $z_j^{(v)} < z$. Így (i) miatt

$$\left|P(\overline{x}, v, \overline{z}^{(v)})\right| < M < p_v,$$

következésképp $P(\overline{x}, v, \overline{z}^{(v)})$ értéke csak nulla lehet.

Minden $v < u$-ra találtunk tehát olyan $\overline{z} \geq 0$-t, amire $P(\overline{x}, v, \overline{z}) = 0$, így $\langle \overline{x}, u \rangle \in R$, ahogyan kívántuk. ∎

Könnyű olyan $Q(\overline{x}, u, z)$ polinomot találni, hogy adott $\overline{x} \in \omega^n$, u, $z \in \omega$ mellett minden $0 \leq v < u$ és $\overline{t} \in \omega^n$, $\overline{t} < z$ esetén

$$\left|P(\overline{x}, v, \overline{t})\right| \leq Q(\overline{x}, u, z)$$

legyen. Egyszerűen P-ben az összes együtthatót az abszolút értékével helyettesítjük, továbbá az utolsó m darab $z_1, \ldots, z_m$ változó mindegyikének a helyébe z-t írunk. Ekkor a lemma (i) feltétele az $M = Q(\overline{x}, u, z) + 2u + z + 1$ választással nyilván teljesül. (iv)-ről könyen látható, hogy diophantikus reláció, így elegendő (ii)-vel és (iii)-vel foglalkoznunk.

Az, hogy az (iii) alatti m darab reláció mindegyike diophantikus, azonnal következik abból, hogy az $f(x) = x!$ faktoriális függvény diophantikus. Valóban, $\prod_{i<z}(a-i)$ pontosan akkor osztható s-sel, ha (az (i) és (ii) szerint) pozitív tényezőkből álló

$$\prod_{i<z}(a+s-i) = \frac{(a+s)!}{(a+s-z)!}$$

szorzat osztható s-sel, azaz ha van olyan $q_a \geq 0$ egész, hogy

$$(a+s)! = q_a \cdot s \cdot (a+s-z)!.$$

Ez valóban diophantikus, ha $x!$ az.

Végül (ii)-ben s-et és c-t is meg tudjuk diophantikus függvénnyel adni, ugyanilyen feltétel mellett. A

$$b_v = \frac{M! - v - 1}{v+1} \qquad v = 0, \ldots, u-1$$

választással ugyanis a b_v-k szorzata

$$s = \frac{M!-1}{1} \cdot \frac{M!-2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{M!-u}{u} = \binom{M!-1}{u} = \frac{(M!-1)!}{u!(M!-1-u)!}$$

és még $b_{u-1} > M$ is teljesül, ha $M > u+3$. Ha pedig

$$c = M! - 1$$

akkor $c - v = M! - 1 - v$ valóban osztható b_v-vel. Így csak azt kell ellenőriznünk, hogy a b_v számok páronként relatív prímek, és mindegyiknek van M-nél nagyobb prímosztója. Legyen $0 \leq i < j < u$. Ha egy p prímszám osztója lenne b_i-nek és b_j-nek, akkor

$$p \mid b_i - b_j = \frac{M!(j-i)}{ij},$$

tehát $M > u > j - i$ miatt p mindenképpen osztója lenne $M!$-nak is. Ezért $p \mid b_i = \dfrac{M!}{i+1} - 1$ csak úgy lehet, ha p egyúttal $(i+1)$-nek is osztója. De $i + 1 \leq u$ és $2u < M$ esetén p biztosan osztója lesz $\dfrac{M!}{i+1}$-nek, tehát nem lehet osztója az ennél eggyel kisebb számnak, b_i-nek.

A fenti okoskodás egyúttal azt is adja, hogy b_i-nek egyátalán nincs M-nél kisebb prímosztója, tehát p_i-nek b_i tetszőleges prímosztója megfelelő.

10. Lemma. *Ha az $f(x) = x!$ függvény diophantikus, akkor az R reláció is az.*

Bizonyítás. Az előzőek alapján $\langle \overline{x}, u\rangle \in R$ akkor és csak akkor, ha vannak olyan M, z, x, $c \in \omega$ és $\overline{a} \in \omega^m$ egészek, melyekre

(i) $M = Q(\overline{x}, u, z) + 2u + z + 4$;

(ii) $s = \binom{M!-1}{u} = \dfrac{(M!-1)!}{u!(M!-1-u)!}$, $\quad c = M! - 1$;

(iii) minden $j = 1, 2, \ldots, m$-re $s \,\Big|\, \dfrac{(a_j + s)!}{(a_j + s - z)!}$;

(iv) $P(\overline{x}, c, \overline{a}) \equiv 0 \pmod{s}$.

Mivel ezen relációk mindegyike diophantikus a mondott feltétel mellett, a lemma állítását beláttuk. ■

Ezek után elegendő egyetlen függvényről, nevezetesen az $x!$ függvényről igazolnunk, hogy diophantikus, ebből már következik, hogy minden parciálisan rekurzív függvény is az. Ehhez először igazoljuk, hogy ha a $g(x, y) = x^y$ hatványfüggvény diophantikus, akkor a faktoriális függvény is az, majd egy speciális típusú Pell-egyenlet vizsgálata után a hatványfüggvényről is belátjuk, hogy diophantikus.

11. Lemma. *Ha a hatványfüggvény diophantikus, akkor a faktoriális függvény is az.*

Bizonyítás. Állítjuk, hogy $y = k!$ akkor és csak akkor, ha vagy $k = 0$ és $y = 1$, vagy ha vannak olyan n, u, a és $b \in \omega$ értékek, hogy

$k \geq 1$, $\; n = k^2 \cdot (2k)^k + 1$, $\; u = 2^n + 1$;

$a \cdot y \leq n^k < a \cdot (y+1)$ $\qquad$ (azaz $y = \left[\dfrac{n^k}{a}\right]$);

$b \cdot u^k \leq (u+1)^n < (b+1) \cdot u^k$ $\qquad$ (azaz $b = \left[\dfrac{(u+1)^n}{u^k}\right]$);

$a < u$, $u \mid b - a$ $\qquad$ (azaz b-nek u-val való osztásakor adódó maradék éppen a).

Ezek a relációk nyilván mind diophantikusak, ha a $g(x, y) = x^y$ az.

Mivel k értéke egyértelműen meghatározza n-et és az u-t, továbbá ezek b-t, b és u a-t, végül n, k, és a értéke y-t, azért ezeket a feltételeket pontosan egy y elégíti ki. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy $y = k!$-ra a feltételek kielégíthetők.

Először is a binomiális tétel alapján

$$\frac{(u+1)^n}{u^k} = \sum_{i>k} \binom{n}{i} u^{i-k} + \binom{n}{k} + \sum_{i<k} \binom{n}{i} u^{i-k}.$$

Az $u = 2^n + 1 > 2^n$ feltételből azonnal adódik, hogy az összeg harmadik tagja 1-nél kisebb, az első szumma mindegyik tagja osztható u-val és $u > 2^n \geq \binom{n}{k}$, ezért $(u+1)^n/u^k$ egész részét u-val osztva a maradék éppen $\binom{n}{k}$, tehát $a = \binom{n}{k}$. Így elegendő megmutatnunk, hogy $n = k^2 \cdot (2k)^k + 1 > k^2 \cdot (2k)^k$ esetén

$$k! = \left[\left[\frac{n^k}{\binom{n}{k}}\right]\right]$$

Ennek bizonyításához először megjegyezzük, hogy $0 < \alpha < 1$ és $k \geq 1$ esetén $(1-\alpha)^k \geq 1 - k \cdot \alpha$, tehát

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^k \geq 1 - \frac{k^2}{n} > 1 - \frac{1}{(2k)^k} = 1 - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k}\right)^k > 1 - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right)^k,$$

és így

$$1 < \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right)^k = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{k^k}\right).$$

Ezek után

$$k! \leq k! \frac{n^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)} = \frac{n^k}{\binom{n}{k}} < k! \left(\frac{n}{n-k}\right)^k =$$
$$= k! \frac{1}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^k} < k! \left(1 + \frac{1}{k^k}\right) \leq k! + 1$$

ahogyan állítottuk. ■

A hátralevő részben azt bizonyítjuk be, hogy a hatványfüggvény diophantikus. Ezt egy speciális típusú Pell-egyenlet vizsgálatával kezdjük.

Legyen a egynél nagyobb egész, és $d = a^2 - 1$. $(a + \sqrt{d})(a - \sqrt{d}) = 1$ miatt $(a + \sqrt{d})^n = (a - \sqrt{d})^{-n}$, így minden n egész számra egyértelműen találhatók olyan $x_a(n)$ és $y_a(n)$ egész számok, hogy

(1) $$(a + \sqrt{d})^n = x_a(n) + y_a(n)\sqrt{d},$$

és ekkor persze

(2) $$(a - \sqrt{d})^n = x_a(n) - y_a(n)\sqrt{d}.$$

Speciálisan $x_a(0) = 1$, $y_a(0) = 0$, $x_a(1) = a$, $y_a(1) = 1$, továbbá $n > 0$ esetén $x_a(n)$ és $y_a(n)$ pozitívak, $x_a(n) = x_a(-n)$ valamint $y_a(n) = -y_a(-n)$. Mivel $(a + \sqrt{d})^{n+m} = (a + \sqrt{d})^n \cdot (a + \sqrt{d})^m$, (1)-ből azonnal adódik, hogy

(3) $$\begin{aligned} x_a(n+m) &= x_a(m)x_a(n) + d \cdot y_a(m)y_a(n) \\ y_a(n+m) &= x_a(m)y_a(n) + x_a(n)y_a(m). \end{aligned}$$

Ezeket $m = \pm 1$-re felírva és páronként összeadva

$$(4) \qquad \begin{aligned} x_a(n+1) + x_a(n-1) &= 2a x_a(n) \\ y_a(n+1) + y_a(n-1) &= 2a y_a(n), \end{aligned}$$

tehát az $\{x_a(n)\}$ és $\{y_a(n)\}$ sorozatok kielégítik az

$$r_{n+1} = 2ar_n - r_{n-1}$$

rekurziót. (3)-ban $m = 1$-et téve

$$\begin{aligned} x_a(n+1) &= a x_a(n) + d y_a(n) \\ y_a(n+1) &= a y_a(n) + x_a(n) \end{aligned}$$

adódik. Így $n \geq 0$-ra mind $x_a(n)$ mind $y_a(n)$ n-ben szigorúan monoton nő, továbbá $n \geq 1$-re

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{(2a-1)^n}{2} < x_a(n) &\leq \frac{(2a)^n}{2}, \\ (2a-1)^{n-1} \leq y_a(n) &\leq (2a)^{n-1}, \end{aligned}$$

ez szimultán rekurzióval egyszerűen látható.

12. Tétel. *Az $x^2 - dy^2 = 1$ Pell-egyenlet nem-negatív megoldásai pontosan az $\langle x_a(n), y_a(n)\rangle$ párok $n \geq 0$-ra.*

Bizonyítás. Az (1) és (2) összefüggéseket összeszorozva

$$x_a(n)^2 - d \cdot y_a(n)^2 = 1,$$

vagyis $\langle x_a(n), y_a(n)\rangle$ valóban megoldás. Legyen most $\langle x, y\rangle$ a Pell egyenletnek ezektől különböző, nem-negatív egészekből álló megoldása, továbbá legyen $n \geq 0$ olyan, hogy

$$(a + \sqrt{d})^n \leq x + y\sqrt{d} < (a + \sqrt{d})^{n+1}.$$

Itt egyenlőség nem állhat, mert akkor $x = x_a(n)$ és $y = y_a(n)$ volna. Legyenek x' és y' olyan egészek, hogy

$$x' + y'\sqrt{d} = \frac{x + y\sqrt{d}}{(a + \sqrt{d})^n} = (x + y\sqrt{d})(a + \sqrt{d})^{-n} = (x + y\sqrt{d})(x_a(n) - y_a(n)\sqrt{d}).$$

Ekkor $1 < x' + y'\sqrt{d} < a + \sqrt{d}$, és könnyen ellenőrizhető, hogy $x'^2 - dy'^2 = 1$. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen. Valóban,

$$(x' + y'\sqrt{d})(x' - y'\sqrt{d}) = 1,$$

és itt mindkét tényező pozitív (hiszen az első még 1-nél is nagyobb), tehát a reciprokokat véve $1 > x' - y'\sqrt{d} > (a + \sqrt{d})^{-1} = a - \sqrt{d}$, azaz

$$-1 < -x' + y'\sqrt{d} < -a + \sqrt{d}.$$

Ezt a fenti $1 < x' + y'\sqrt{d} < a + \sqrt{d}$ egyenlőtlenséghez hozzáadva $0 < 2y'\sqrt{d} < 2\sqrt{d}$, azaz $0 < y' < 1$ adódik, ami lehetetlen, hiszen y' egész. ∎

A továbbiakban a megoldások oszthatósági viszonyait vizsgáljuk. Először is megállapítjuk, hogy $x_a(n)$ és $y_a(n)$ relatív prímek minden n-re, hiszen ha b osztója mindkettőnek, akkor osztója $x_a(n)^2 - dy_a(n)^2 = 1$-nek is, tehát $b = 1$.

13. Lemma. *$y_a(m) \mid y_a(n)$ akkor és csak akkor, ha $m \mid n$.*

Bizonyítás. (3) alapján

$$y_a(n-m) = x_a(m)y_a(n) - x_a(n)y_a(m),$$

ezért $y_a(m)$ és $y_a(n)$ legnagyobb közös osztója egyúttal osztója $y_a(n-m)$-nek is. Másrészt $y_a(m)$ és $x_a(m)$ relatív prímek, így az $y_a(n-m)$ és $y_a(m)$ legnagyobb közös osztója osztója $y_a(n)$-nek, tehát

$$\operatorname{lnko}\big(y_a(m), y_a(n)\big) = \operatorname{lnko}\big(y_a(n-m), y_a(n)\big).$$

Innen az euklídeszi algoritmus alapján $y_a(0) = 0$ miatt

$$\operatorname{lnko}\big(y_a(m), y_a(n)\big) = y_a(\operatorname{lnko}(m,n)),$$

amiből a lemma állítása következik. ■

14. Lemma. *$y_a(i)^2 \mid y_a(i\cdot k)$ akkor és csak akkor, ha $y_a(i) \mid k$.*

Bizonyítás. Először is megjegyezzük, hogy

$$x_a(i\cdot k) + y_a(i\cdot k)\sqrt{d} = \big(a+\sqrt{d}\big)^{i\cdot k} = \big(x_a(i) + y_a(i)\sqrt{d}\big)^k.$$

Ennek alapján a binomiális tételből

$$y_a(i\cdot k) = \binom{k}{1} y_a(i)x_a(i)^{k-1} + \binom{k}{3} d\cdot y_a(i)^3 x_a(i)^{k-3} + \ldots,$$

és így

$$y_a(i\cdot k) \equiv k\cdot y_a(i)x_a(i)^{k-1} \pmod{y_a(i)^3}.$$

Innen a lemma "csak akkor" része közvetlenül adódik.

A fordított irányú implikáció bizonyításához tegyük fel, hogy $y_a(i)^2 \mid y_a(i\cdot k)$. A fenti kongruencia alapján ekkor $k\cdot y_a(i)x_a(i)^{k-1}$ is osztható $y_a(i)^2$-tel, ami $x_a(i)$ és $y_a(i)$ relatív prím volta miatt az jelenti, hogy $y_a(i)$ osztója k-nak. ■

15. Lemma. *Tegyük fel, hogy $x_a(i) \equiv x_a(j) \pmod{x_a(n)}$. Ekkor vagy $i \equiv j \pmod{4n}$, vagy $i \equiv -j \pmod{4n}$.*

Bizonyítás. A (3) összefüggés szerint

$$x_a(m+n) + x_a(m-n) = 2x_a(n)x_a(m),$$

hiszen $x_a(n) = x_a(-n)$ és $y_a(n) = -y_a(-n)$. Ennek alapján

$$x_a(j) = x_a((j-n)+n) \equiv -x_a((j-n)-n) = -x_a(j-2n) \pmod{x_a(n)},$$

és így

$$x_a(j) \equiv -x_a(j-2n) \equiv x_a(j-4n) \pmod{x_a(n)}.$$

Feltehetjük tehát, hogy $0 \le i, j < 4n$. Továbbá ugyancsak a fentiek miatt

$$x_a(i) \equiv -x_a(2n-i) \equiv -x_a(2n+i) \equiv x_a(4n-i) \pmod{x_a(n)},$$

továbbá

$$x_a(0) \equiv 1, \quad x_a(n) \equiv 0, \quad x_a(2n) \equiv -1, \quad x_a(3n) \equiv 0 \pmod{x_a(n)}.$$

Ha most még azt is tudjuk, hogy $x_a(n-1) < \frac{1}{2}x_a(n)$, akkor készen vagyunk. Az $x_a(n)$ sorozat ugyanis szigorúan monoton nő $n \ge 0$-ra, és így

$$1 = x_a(0) < x_a(1) < \ldots < x_a(n-1) < \frac{1}{2}x_a(n) <$$
$$< x_a(n) - x_a(n-1) < \ldots < x_a(n) - x_a(0) < x_a(n),$$

tehát az $x_a(0), \ldots, x_a(2n)$ számok mind különböző maradékot adnak $x_a(n)$-nel osztva. Következésképp a $0 \le j < 4n$ intervallumon az 1-et és -1-et kivéve minden maradék pontosan kétszer fordul elő: egyszer j-re, másszor $4n-j$-re. Így ha $0 \le i, j < 4n$, továbbá $x_a(i) \equiv x_a(j) \pmod{x_a(n)}$, akkor vagy $i = j$ vagy $i = 4n - j$, ahogyan állítottuk.

A (3) összefüggés szerint

$$x_a(n) = a \cdot x_a(n-1) + d \cdot y_a(n-1),$$

ezért

$$\frac{1}{2}x_a(n) \ge \frac{1}{a}x_a(n) = x_a(n-1) + \frac{d}{a}y_a(n-1) > x_a(n-1),$$

hiszen $n \ge 2$ és ezért $y_a(n-1) > 0$. Ezzel a lemmát beláttuk. ∎

16. Lemma. *Legyenek a, b egynél nagyobb egészek, és $a \equiv b \pmod{c}$ Ekkor $x_a(n) \equiv x_b(n) \pmod{c}$ minden $n \ge 0$-ra.*

Bizonyítás. Az állítás igazsága $n = 0$-ra és $n = 1$-re közvetlenül ellenőrizhető. Nagyobb n-ekre a (4)-ből adódó

$$x_a(n+1) = 2ax_a(n) - x_a(n-1)$$

rekurzív összefüggés alapján teljes indukcióval bizonyítható. ∎

17. Lemma $y_a(n) \equiv n \pmod{a-1}$.

Bizonyítás. Az $y_a(n+1) = 2ay_a(n) - y_a(n-1) = (2a-2)y_a(n) + 2y_a(n) - y_a(n-1)$ összefüggés alapján teljes indukcióval. ∎

18. Tétel. *Az $y_a(k)$ kétváltozós függvény diophantikus.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $a \geq 1$ és $k \geq 1$ esetén $y = y_a(k)$ akkor és csak akkor igaz, ha vannak olyan b, u, v, s, t és x nem-negatív egész számok, melyekre a következő tizenegy diophantikus reláció mindegyike teljesül:

(i) $x^2 - (a^2-1)y^2 = 1, \quad u^2 - (a^2-1)v^2 = 1, \quad s^2 - (b^2-1)t^2 = 1;$

(ii) $0 \leq v, \quad k \leq y, \quad 1 < b;$

(iii) $4y \mid b-1, \quad y^2 \mid v;$

(iv) $a \equiv b \pmod{u}, \quad x \equiv s \pmod{u}, \quad t \equiv k \pmod{b-1}$.

Ezzel az állítást nyilván beláttuk, hiszen a hiányzó $a \leq 1$ illetve $k = 0$ esetekben a függvényt könnyű diophantikus relációkkal definiálni.

Elsőként tegyük fel, hogy $y = y_a(k)$, és keressünk olyan b, u, v, a, t és x értékeket, amikre az összes reláció fennáll.

Legyen $n = 2ky_a(k)$, továbbá $x = x_a(k)$, $u = x_a(n)$, $v = y_a(n)$, $a = x_b(k)$, $t = y_b(k)$. Ezekkel a választásokkal (i) mindhárom egyenlőtlensége teljesül. Feltételünk szerint $k \geq 1$, ezért $n \geq 2$, tehát $0 < y_a(n) = v$, és $k = y_a(k) = y$ is teljesül. Mivel $y_a(k) \mid n$, azért a 14. lemma alapján $y_a(k)^2 \mid y_a(n)$, tehát $y^2 \mid v$.

A b-t úgy kell megválasztanunk, hogy egyrészt $b \equiv 1 \pmod{4y}$, másrészt $b \equiv a \pmod{u}$ legyen. Ilyen b biztosan van (mégpedig akármilyen nagy is), ha $4y$ és u relatív prímek. De egyrészt $y_a(n)$ páros, hiszen n páros, és (3) alapján

$$y_a(2m) = 2y_a(m)x_a(m);$$

másrészt $k \mid n$ és így az 13. lemma miatt $y_a(k) \mid y_a(n)$. Ezért $4y = 4y_a(k)$ minden prímosztója osztója $y_a(n)$-nek is, $y_a(n)$ és $x_a(n) = u$ relatív prímek, tehát $4y$-nak és u-nak nincs közös prímosztója — valóban relatív prímek. Miután $b > 1$-et így megválasztottuk, a 16. lemma alapján $x_a(k) \equiv x_b(k) \pmod{u}$, vagyis $x \equiv s \pmod{u}$, amivel (iv) második kongruenciáját is beláttuk. Végül az 17. lemma alapján $t = y_b(k) \equiv k \pmod{b-1}$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $a > 1$, $k \geq 1$, és vannak a (i)–(iv) relációkat kielégítő b, u, v, s, t, x és y természetes számok, azt akarjuk belátni, hogy $y = y_a(k)$.

Mivel $a, b > 1$, az $\langle x, y\rangle$, $\langle u, v\rangle$ és $\langle s, t\rangle$ párok megoldásai egy–egy Pell-egyenletnek, tehát vannak olyan i, j és n nem-negatív egészek, hogy

$$x = x_a(i),\ y = y_a(i), \quad u = x_a(n),\ v = y_a(n), \quad s = x_b(j),\ t = y_b(j),$$

és azt szeretnénk belátni, hogy $i = k$. A $k \leq y$ feltétel miatt $y = y_a(i) \neq 0$, így $i > 0$, továbbá $v = y_a(n) > 0$ és ezért $n > 0$ is áll. $y^2 \mid v$, ahonnan $v \neq 0$ miatt

$y \leq v$. Ha most $n = 1$, akkor $v = y_a(1) = 1$ és $k \leq y - y_a(i) \leq v$ alapján $k = i = 1$. Így feltehetjük, hogy $n \geq 2$, amikor is $v = y_a(n) > 2$. Ekkor az $y^2 \mid v$ feltételből $y = y_a(i) < v = y_a(n)$, tehát $i < n$.

Tudjuk, hogy $a \equiv b \pmod{u}$, így alkalmazhatjuk a 16. lemmát:

$$x_a(j) \equiv x_b(j) = s \equiv x - x_a(i) \pmod{u}.$$

Most $u = x_a(n)$, $0 < i < n$, tehát a 15. lemma alapján

$$j \equiv \pm i \pmod{4n}$$

valamelyik előjellel. Tudjuk azt is, hogy $y^2 = y_a(i)^2$ osztója $v = y_a(n)$-nek, ezért a 14. lemma szerint $y \mid n$, tehát

$$j \equiv \pm i \pmod{4y}$$

valamilyen előjellel.

Az 17. lemma és (iv) harmadik kongruenciája szerint

$$k \equiv t = y_b(j) \equiv j \pmod{b-1}$$

és mivel $4y \mid b-1$, azért

$$k \equiv j \pmod{4y}.$$

Végül is azt kaptuk, hogy $k \equiv \pm i \pmod{4y}$ valamilyen előjellel, $i \leq y_a(i) = y$, továbbá a (ii) feltétel miatt $k \leq y$, így ez a kongruencia csak úgy állhat fönn, ha $k = i$ és ezt akartuk bizonyítani. ∎

Lényegében elérkeztünk célunkhoz: minden rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy igazoljuk: a hatványfüggvény diophantikus.

19. Tétel. *Az n^k kétváltozós függvény diophantikus.*

Bizonyítás. Elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, mikor n és k is legalább kettő. Állítjuk, hogy ilyen feltételek mellett $y = n^k$ akkor és csak akkor, ha vannak olyan i, p, q természetes számok, hogy

$$\begin{aligned}
&i = 1 + 2k \cdot y_n(k+1), \\
&p = y_{i \cdot n}(k+1), \\
&q = y_i(k+1), \\
&4(p - yq)^2 < q^2 \qquad\qquad \left(\text{azaz } \left|y - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Az előző tétel szerint ezek mind diophantikus relációk, így ha ezt igazoljuk, készen vagyunk.

Az n és k értékek egyértelműen meghatározzák i, p és q értékét, és legfeljebb egy olyan y van, amire $\left|y - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2}$. Következésképp elég megmutatni, hogy az $y = n^k$ teljesíti ezt a feltételt.

Korábban (5) alatt láttuk, hogy minden $k \geq 0$-ra

$$(2a-1)^k \leq y_a(k+1) \leq (2a)^k.$$

Ezért egyrészt

$$\frac{p}{q} \leq \frac{(2in)^k}{(2i-1)^k} = n^k\left(1 - \frac{1}{2i}\right)^{-k} \leq n^k\left(1 - \frac{k}{2i}\right)^{-1} =$$
$$= n^k\left(1 + \frac{k}{2i-k}\right) < n^k + \frac{kn^k}{i}.$$

Itt felhasználtuk, hogy $0 < \alpha < 1$ és $k \geq 1$ esetén $(1-\alpha)^k \geq 1 - \alpha k$, valamint hogy $i \geq 1 + k$. Másrészt

$$\frac{p}{q} \geq \frac{(2in-1)^k}{(2i)^k} = n^k\left(1 - \frac{1}{2in}\right)^k \geq n^k\left(1 - \frac{k}{2in}\right) = n^k - \frac{kn^k}{2in}.$$

Így

$$-\frac{kn^k}{i} < n^k - \frac{p}{q} \leq \frac{kn^k}{2in}.$$

Ám i definíciója alapján $i = 1 + 2k \cdot y_n(k+1) \geq 1 + 2k \cdot (2n-1)^k > 2kn^k$, tehát a bal és jobb oldalak abszolút értéke egyaránt kisebb 1/2-nél:

$$\left|n^k - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2},$$

amit bizonyítani akartunk. ∎

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy egy R reláció akkor és csak akkor rekurzíve felsorolható, ha van olyan p polinom, melynek az egész helyeken felvett értékei közül a nemnegatívak éppen R elemeit adják ki. Speciálisan van olyan polinom, melynek a pozitív értékei éppen a prímek.
2. Mutassuk meg, hogy olyan eljárás sincs, mely tetszőleges egész együtthatós polinomról eldöntené, hogy van-e *egészekből* álló megoldása.

3. Bizonyítsuk be, hogy van olyan polinom, melynek akkor és csak akkor nincs egész megoldása, ha a Fermat-sejtés igaz. (Ugyanez a Rieman sejtésre.)
4. Igazoljuk, hogy minden $n \geq 4$-re van n-edfokú univerzális polinom.
5. Igazoljuk, hogy nincs olyan algoritmus, ami eldöntené, hogy egy polinomnak van-e legalább 100 egész megoldása.
6. Van-e olyan polinom, aminek nincs egészekből álló megoldása, de ezt a tényt nem tudjuk igazolni?

Irodalomjegyzék

[1] M. Davis, *Hilbert's tenth problem is unsolvable,* Amer. Math. Monthly, **80** (1973), 233–269.

[2] M. Davis, *Unsolvable problems,* Handbook of Math. Logic, 567–594.

[3] Sz. Sz. Demidov, *Hilbert problémáinak történetéhez,* Mat. Lapok, **21** (1970), 279–293.

[4] Matyijaszevics, *Hilbert 10. problémájának megoldása,* Mat. Lapok, **21** (1970), 83–87.

László Csirmaz: Hilbert's tenth problem

In this paper we give a full and detailed proof for the unsolvability of Hilbert's tenth problem.

DÍSZÍTÉSEK ÉS MINTÁK*
(M. C. Escher stílusában, D-szimbólumokkal)

MOLNÁR EMIL**

Ajánlom Édesapámnak Molnár Ernőnek a matematika lelkes tanárának és népszerűsítőjének emlékére.

A síkbeli *díszítések* és *minták* középületek, lakások falát, padlóját, utcáink kövezetét teszik szebbé. M. C. ESCHER (1898–1972) holland művész grafikái, rajzai [4,9] mutatják, mennyire érdeklődött az ismétlődő minták szerkesztésének titkai iránt. Ez komoly matematikai tanulmányokra is késztette. Ebben az előadásban néhány példán szemléltetem, hogyan alkalmazhatjuk a matematika módszereit „szép minták" szerkesztésére.

A *D-szimbólumok új módszerével* előírt szerkezetű síkbeli sokszögfelosztások (2-kövezések) osztályozásához is eljuthatunk, ahogy a 2-dimenziós homogén háromszögfelosztások ábraszerű és tábázatos felsorolásával ezt szemléltetem (elsőként itt publikálva). A matematikai fogalomalkotás folyamatát is érzékeltetjük az alábbiakban:

díszítés, minta → síkfelosztás topológikus sokszögekkel → baricentrikus felbontás megjelölt topológikus háromszögekre → a minta-felosztás szimmetria csoportja kijelöli a baricentrikus felbontás háromszögeinek pályáit → a megjelölt háromszögek pályáiból kialakítjuk a D-gráf/diagram fogalmát → a háromszögek megjelölt csúcsainál csatlakozó háromszögek számából kialakítjuk a D-gráf csúcsain értelmezett D-mátrixfüggvény fogalmát → az így nyert D-gráf és D-mátrixfüggvény együttesét nevezzük D-szimbólumnak (B. N. DELONE (DELAUNAY) — M. S. DELANEY — A. W. M. DRESS *tiszteletére) → hogyan lehet egy D-szimbólumból egy síkbeli mintát* (egy ekvivariáns homeomorfizmus erejéig egyértelműen) *valamely síkban: vagy az* $\mathbf{E}^2$ *euklideszi síkban, vagy az* $\mathbf{S}^2$ *gömbfelületen, vagy a* $\mathbf{H}^2$ *hiperbolikus* (Bolyai-Lobacsevszkij-féle) *síkban előállítani → a módszert magasabb*

* „Új utak és lehetőségek a geometriában" Nagykanizsa, 1993 október 13–16. Az előadás matematikailag részletezett változata.

** Készült az OTKA T 7351 (1993) támogatásával.

dimenzióra is kiterjeszthetjük, a 3-kövezések kristálygeometriai alkalmazásai, a számítógép bekapcsolása különösen fontos → a $3 \leq d$ kövezések realizálása még sok megoldatlan problémát tartogat számunkra.

1. A $\{8, 8, 4\}$ ARCHIMÉDESZI KÖVEZÉS

Az 1. ábra mutatja ezt a nagyon népszerű kövezést, melyet egy (nem feltétlenül szabályos) nyolcszög és egy négyzet együtteséből mint kőelemből szinte kötőanyag nélkül valósíthatunk meg. Az $\mathbf{E}^2$ euklideszi síkra kiterjesztett kövezés szimmetriái, azaz önmagára képező egybevágósági transzformációi az egymásutáni végrehajtás (kompozíció) műveletével *csoportot* alkotnak. Ezt a $G =$ **p4mm** szimmetriacsoportot 3 darab *egyenestükrözés generálja,* melyeknek tengelyeit választhatjuk pl. az 1. ábra szerint: az $\mathcal{F}_G$ egyenlőszárú derékszögű háromszög oldalegyeneseire történő 3 tükrözés generálja G-t. Valóban $\mathcal{F}_G$-t a (vékony) fél-négyzetoldallal és a (vastag) fél-nyolcszögoldallal, valamint a találkozásuknál létrejövő csúccsal együtt az oldalegyenesekre tükrözve, fokozatosan fedhetjük be az $\mathbf{E}^2$ síkot. Eközben létrejön a kövezés, melynek csúcsain a G szimmetria csoport *tranzitív* módon hat, bármely csúcs bármely másik csúcsba átvihető a G-hez tartozó valamely transzformációval. Az ilyen kövezéseket nevezzük *archimédeszinek,* ha ezen kívül még szabályos sokszögekből is áll. Az 1. ábrán egy csúcsot (és ezért bármelyik csúcsot) 2 nyoclszög és 1 négyszög vesz körül, ahogy a fejezet címe mutatja. A $G =$ **p4mm** csoport a sík 17 *kristálycsoportjának* egyike (11. sorszámú), melyet az $\mathcal{F}_G$ alaptartomány, a határára vonatkozó tükrözési előírásokkal, már egyértelműen meghatároz.

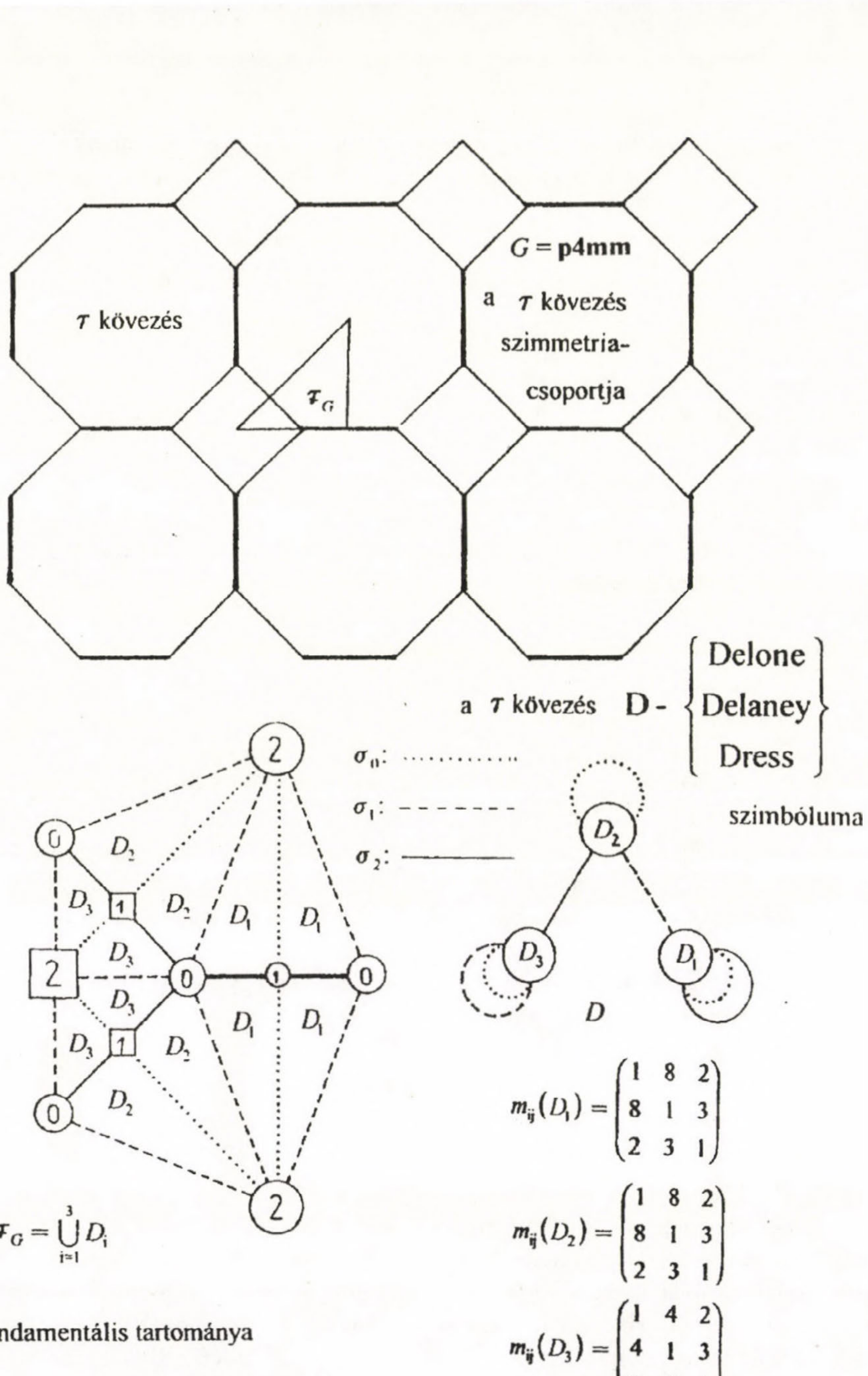
Most fokozatosan értelmezzük az 1. ábra $(\mathcal{T}, G)$ *kövezéséhez tartozó D-szimbólumot.* A $\mathcal{T}$ kövezésen *baricentrikus felbontást* vezetünk be, melyet a G csoport transzformációi nem változtatnak meg. Vesszük bármely sokszög (2-dimenziós lap) 2-középpontját, egy tetszőleges élének (1-dimenziós lap) 1-középpontját, majd vesszük ennek az élnek valamelyik csúcsát (0-dimenziós lap 0-középpontját). Így kapjuk a baricentrikus felbontás egy megjelölt háromszögét, ti. a csúcsok 2, 1, 0 jelölést kapnak, mint ahogy a csúcsokkal szemközti oldalak is. A 2-oldalt folytonos vonal, az 1 és 0-oldalt szaggatott, illetve pontozott vonal jelzi az 1. ábra kinagyított részletén. A baricentrikus felbontás háromszögeinek halmazát $\mathcal{C}$ jelöli majd, a háromszögek 0-, 1-, 2-oldal menti szomszédságát σ_0, σ_1, σ_2 operációk bevezetésével is leírhatjuk.

$$(1.1) \qquad C' = \sigma_i(C); \quad C, C' \in \mathcal{C}; \quad i \in I := \{0, 1, 2\}$$

fejezi ki, hogy a C' és C háromszögek az i oldal mentén szomszédosak.

Ezután nézzük a $\mathcal{T}$ kövezés G szimmetriacsoportját, melynek minden eleme megtartja a baricentrikus felbontást, a szereplő háromszögek csúcsainak, oldalainak megjelölését és így a σ_i $\big(i \in I = \{0, 1, 2\}\big)$ operációkat is. Ezt jelölésben

$$(1.2) \qquad [\sigma_i(C)]g = \sigma_i\big[(C)g\big]; \quad C \in \mathcal{C}; \quad i \in I; \quad g \in G$$



$G = \mathbf{p4mm}$
a $\mathcal{T}$ kövezés szimmetria-csoportja
$\mathcal{T}$ kövezés
$\mathcal{F}_G$
a $\mathcal{T}$ kövezés D- {Delone / Delaney / Dress} szimbóluma
σ_0: ············
σ_1: – – – – – –
σ_2: ————
D_1 D_2 D_3
D
$$m_{ij}(D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$m_{ij}(D_2) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$m_{ij}(D_3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{F}_G = \bigcup_{i=1}^{3} D_i$$
a G fundamentális tartománya

1. ábra

is kifejezi. Azt mondhatjuk, hogy a G csoport jobbról hat a baricentrikus háromszögek $\mathcal{C}$ halmazán, míg a szomszédsági operációk által generált ún. *szabad Coxeter-csoport*

$$(1.3) \qquad \Sigma_I := \langle \sigma_i \mid 1 = \sigma_i\sigma_i =: \sigma_i^2 \ : \ i \in I := \{0,1,2\} \rangle$$

balról hat, ahogy ezt ellenőrizhetjük:

$$(1.4) \qquad \mathcal{C} \ni \sigma_j\sigma_i C g_1 g_2; \quad C \in \mathcal{C}; \quad \sigma_i, \sigma_j \in \Sigma_I; \quad g_1, g_2 \in G$$

a zárójelezés tetszés szerinti csoportosítása ugyanahhoz az eredményhez vezet. (Az egyik írásmódot persze szabadon választhatjuk.)

Egy tetszőleges $C \in \mathcal{C}$ baricentrikus háromszög G-nél származó képei alkotják a C háromszög G-pályáját

$$(1.5) \qquad CG := (Cg \ : \ g \in G) =: D \in \mathcal{C}/G =: \mathcal{D},$$

melyet egy $\mathcal{D}$-vel jelölt pályahalmaz: $\mathcal{C}/G \ni D$ elemének tekintünk, és egy $\mathcal{D}$ gráf (D-gráf) csúcsával is szemléltetjük az 1. ábrán. Esetünkben D_1, D_2, D_3 érzékelteti, hogy 3-féle háromszög(pálya) lép fel a $\mathcal{C}$ baricentrikus felbontásban a G csoport szerint, és a megfelelő $\mathcal{D}$ gráf csúcsait is D_1, D_2, D_3 jelöli. Mindez összhangban van azzal, hogy az $\mathcal{F}_G$ alaptartomány pontosan egy elemet tartalmaz az említett 3 darab háromszögpálya mindegyikéből. Az (1.2) formula mutatja, hogy a pályák között is értelmezhetők a szomszédságokat kifejező σ_i $(i \in I)$ operációk, melyek értelmezik a $\mathcal{D}$ gráf I-megjelölt („I-színezett") éleit. Nagyon fontos, hogy a $\mathcal{D}$ gráfban hurkok is felléphetnek az 1. ábra szerint, ha a G csoportban egyenes tükrözések is vannak. Az alábbi involúciók

$$(1.6) \qquad \sigma_0 : (1)(2)(3); \quad \sigma_1 : (1,2)(3); \quad \sigma_2 : (1)(2,3)$$

a permutációk nyelvén fejezik ki a $\mathcal{D}$ gráf jelentését, ahogy ezt egy számítógép is leírhatja.

Most visszatérünk a $\mathcal{C}$ baricentrikus háromszögfelbontáshoz és megszámoljuk, hogy pl. egy 2-középpontot hány 0-, 1- oldalú háromszög vesz körül. Ez a szám mindig páros és a felét a körülvevő háromszögek mindegyikéhez hozzárendeljük, mint egy m_{01} mátrixelemet. Például a négyzet 2-középpontjában 8 háromszög csatlakozik és mivel mindegyik D_3 jelű, ezért a D_3 nevű pálya háromszögeihez, sőt magához a pályához és a $\mathcal{D}$ gráf D_3 csúcsához az $m_{01} = 4$ mátrixelemet írjuk a nulladik sor első oszlopába.

Általában a $D \in \mathcal{D}$ gráfcsúcshoz rendelt mátrixot az

$$(1.7) \qquad m_{ij}(D) = \min \left\{ m \in \mathbf{N} \ : \ (\sigma_i\sigma_j)^m C = C; \quad C \in D \in \mathcal{D} := \mathcal{C}/G \right\}$$

formulával bármely $D \in \mathcal{D}$ és $i, j \in I := \{0, 1, 2\}$ esetén értelmezhetjük. Vegyük észre az 1. ábrán ennek a *D-mátrixfüggvény*nek, m_{ij}-nek az alábbi tulajdonságait:

$$(1.8)\qquad \begin{array}{ll} \text{a)} & m_{ii}(D) = 1; \\ \text{b)} & m_{ij}(D) = m_{ji}(D) \\ \text{c)} & m_{ij}(D) = m_{ij}(\sigma_i D) \\ \text{d)} & m_{ij}(D) = 2, \text{ ha } |i-j| > 1 \\ \text{e)} & m_{ij}(D) > 2, \text{ ha } |i-j| = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{bármely } D \in \mathcal{D}; \\ i, j \in I := \{0,1,2\} \text{ esetén.} \end{array}$$

A bevezetett $(\mathcal{D}, m_{ij})$ párt *D-szimbólumnak* nevezzük, mely a $(\mathcal{T}, G)$ 2-kövezéshez tartozik az 1. ábra szerint.

Meglepő lehet, hogy a $(\mathcal{D}, m_{ij})$ D-szimbólumból a $(\mathcal{T}, G)$ kövezés „egyértelműen" rekonstruálható (egy ekvivariáns homeomorfizmus erejéig: ez utóbbi azt jelenti, hogy a fenti kövezésnek egy φ homeomorf (topologikus) képe $\mathcal{T}\varphi =: \mathcal{T}'$ és a $\varphi^{-1}G\varphi =: G'$ transzformációcsoport és csak ilyenek ugyanazt a D-szimbólumot határozzák meg (izomorfizmus erejéig; ez utóbbit már nem részletezzük, mert később sorra kerül)). Az is meglepő, hogy egyetlen ún. görbületi állandó

$$(1.9)\qquad K(\mathcal{D}, \mathcal{M}) = \sum_{D \in \mathcal{D}} \left(\frac{1}{m_{01}(D)} + \frac{1}{m_{12}(D)} - \frac{1}{2} \right)$$

nulla, pozitív vagy negatív volta eldönti, hogy a megfelelő $(\mathcal{T}, G)$ kövezés rendre $\mathbf{E}^2$-, $\mathbf{S}^2$-, illetve $\mathbf{H}^2$-ben állítható elő alkalmas G egybevágóságcsoport mellett. (Pontosabban pozitív K esetén még egy többletfeltétel kell, ami biztosítja, hogy a gömbfelület szemközti pontjai csak azonos rendű forgáscentrumok lehetnek.)

Esetünkben K 3-tagú összeg lesz, hiszen a $\mathcal{D}$ gráfnak 3 csúcsa van. Az 1. ábrán látható mátrixokkal valóban

$$(1.10)\qquad K = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

De ha $m_{01}(D_1) = m_{01}(D_2) = 8$ helyett most ugyanazon $\mathcal{D}$ gráf mellett

$$(1.11)\qquad \begin{array}{c} m_{01}(D_1) = m_{01}(D_2) = 6 \text{ vagy } 4, \text{ akkor az } \mathbf{S}^2 \text{ gömbön} \\ \text{rendre a } \{6,6,4\}, \text{ illetve a } \{4,4,4\} \text{ „kocka"} \end{array}$$

kövezést kapjuk. Ha pedig azonos $\mathcal{D}$ gráf mellett

$$(1.12)\qquad \begin{array}{c} m_{01}(D_1) = m_{01}(D_2) = 2q;\ q \leq 5, \text{ akkor a } \mathbf{H}^2 \text{ síkon} \\ q\text{-tól függő végtelen sok } \{2q, 2q, 4\} \text{ alakú} \end{array}$$

archimédeszi felosztást kapunk. Mindez azon múlik, hogy a 3 baricentrikus háromszögből összerakott $\mathcal{F}_G$ alaptartomány $\pi/2$, $\pi/4$ és π/q szögeket igényel úgy, ahogy azt a $q = 4$ euklideszi esetben láttuk. Az $\mathcal{F}_G$ háromszög szögösszege $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{q}$ nagyobb π-nél az (1.11) esetekben, ha $q = 3$ vagy 2; kisebb π-nél, ha $q \geq 5$ az (1.12) esetekben; és éppen π-vel egyenlő a $q = 4$ euklideszi esetünkben. Ez csupán a D-szimbólumból kiolvasható lenne, de később részletezzük.

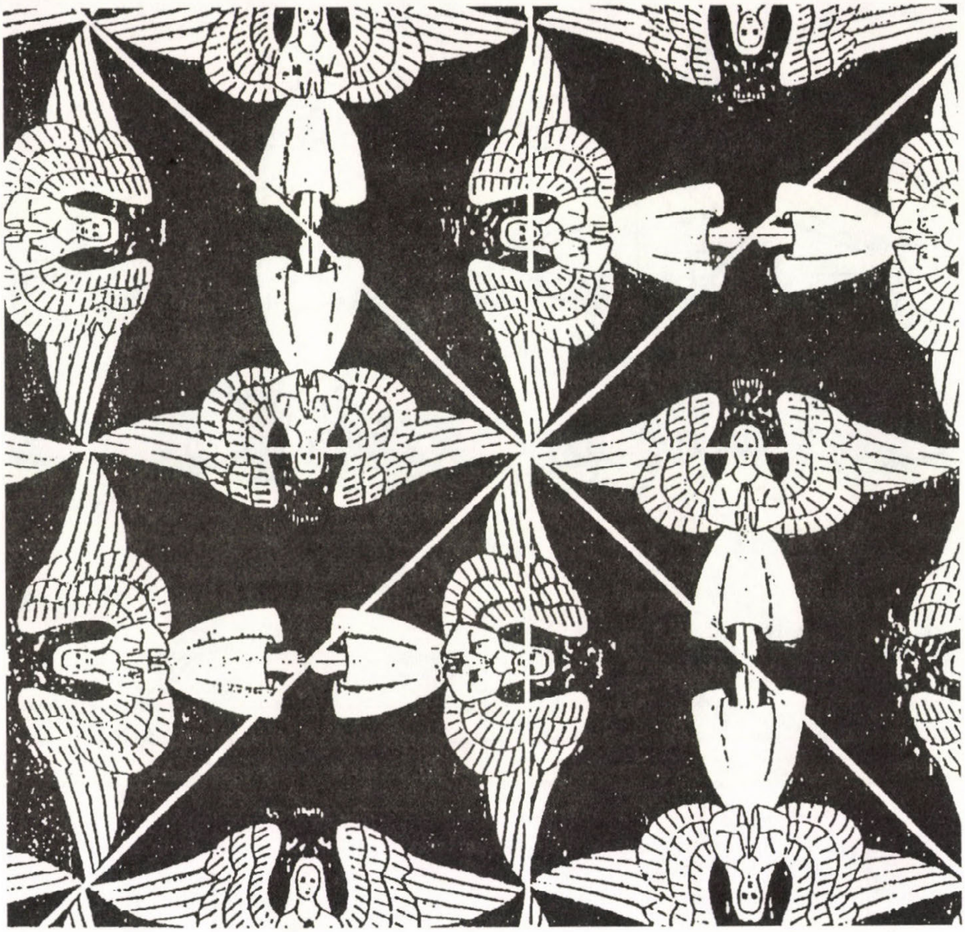
Azt is csupán megemlítjük, hogy a $(\mathcal{T}, G)$ kövezés archimédeszi volta, tehát, hogy G tranzitíven hat a kövezés csúcsain, azon múlik, hogy a $\mathcal{D}$ gráfból a $\cdots\cdots$ éleket, vagyis a σ_0 operációt elhagyva továbbra is összefüggő gráfot kapunk. A ——— éleket, tehát a σ_2 operációt elhagyva két komponens keletkezik, összhangban azzal, hogy kétféle sokszöggel kövezünk. A $- - -$ élek, tehát a σ_1 operáció elhagyásával kapott 2 komponens a vastag, illetve a vékony élek osztályát jellemzik. A megfelelő eggyel alacsonyabb dimenziós $(\mathcal{D}^k, \mathcal{M}^k)$ szimbólumok a σ_i, σ_j operációkkal és mátrixokkal — úgy, hogy $\{i, j, k\} = I := \{0, 1, 2\}$ — a k-középpontú 1-kövezést és a k-középpont G^k stabilizátorrészcsoportját írják le, $G^k < G$. Az utóbbi meggondolásokat az Olvasóra bízzuk.

2. A „MENNY ÉS POKOL" MATEMATIKÁJÁRÓL

ESCHER-nek ezt a rajzát a [9] albumból vettük. A 2. ábra angyal és ördög figurájából egy-egy topológikus (görbevonalú) „háromszöget" olvashatunk ki. A $\mathcal{T}$ kövezést ez a két háromszög alkotja; az oldalak két kő közös határán; a csúcsok legalább 3 kő közös pontjaként jönnek létre. Az alakok belső részleteitől eltekintünk. A végtelen $\mathbf{E}^2$ síkra kiterjesztett kövezés Γ szimmetriacsoportját az angyal és az ördög közös szimmetriatengelye és a szárnyaknál fellépő 4-rendű forgáscentrum jellemzi: $\Gamma = \mathbf{p4gm}$ a 12. számú $\mathbf{E}^2$ síkbeli krisrálycsoport. A 3. ábra a)–d) képein elemezzük a kövezés D-szimbólumának kialakítását most már nagyobb lépésekben rövidebben. Az a)–b) képeken a minta baricentrikus felbontását szemléltetjük a $^1 2$ „angyalközéppont", $^2 2$ „ördögközéppont" kijelölésével; majd az $^1 1$ „élfelezőpontot" a „fejeknél", a $^2 1$ „élközéppontot" a 2, 3, 4, 5 háromszögek közös csúcsaként a „szárnyaknál" jelöljük ki; az $^1 0$ csúcs a „szárnyak" végpontja, míg az $^2 0$ csúcs a „lábak" találkozásánál helyezkedik el. A korábbiaknak megfelelően minden baricentrikus háromszögnek $\cdots\cdots$, $- - -$ és ——— vonallal rajzolt oldala van. A Γ szimmetriacsoport kijelöli a baricentrikus háromszögek $\mathcal{C}$ halmazában az 1, 2, 3 angyal- és 4, 5, 6 ördög-pályákat. A 3. ábra c) képén ábrázoltuk a megfelelő D-diagramot a σ_0, σ_1, σ_2 operációkat ábrázoló élekkel együtt:

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} \cdots\cdots\sigma_0 &: (1)(2,3)(4,5)(6); \quad - - - \sigma_1 : (1,2)(3)(4)(5,6); \\ \text{———}\ \sigma_2 &: (1,6)(2,5)(3,4). \end{aligned}$$

Ha megszámoljuk a csúcsoknál egymáshoz csatlakozó baricentrikus háromszögeket az 1, 2, ..., 6 pályákhoz tartozó tipikus esetekben, akkor megkapjuk a D-

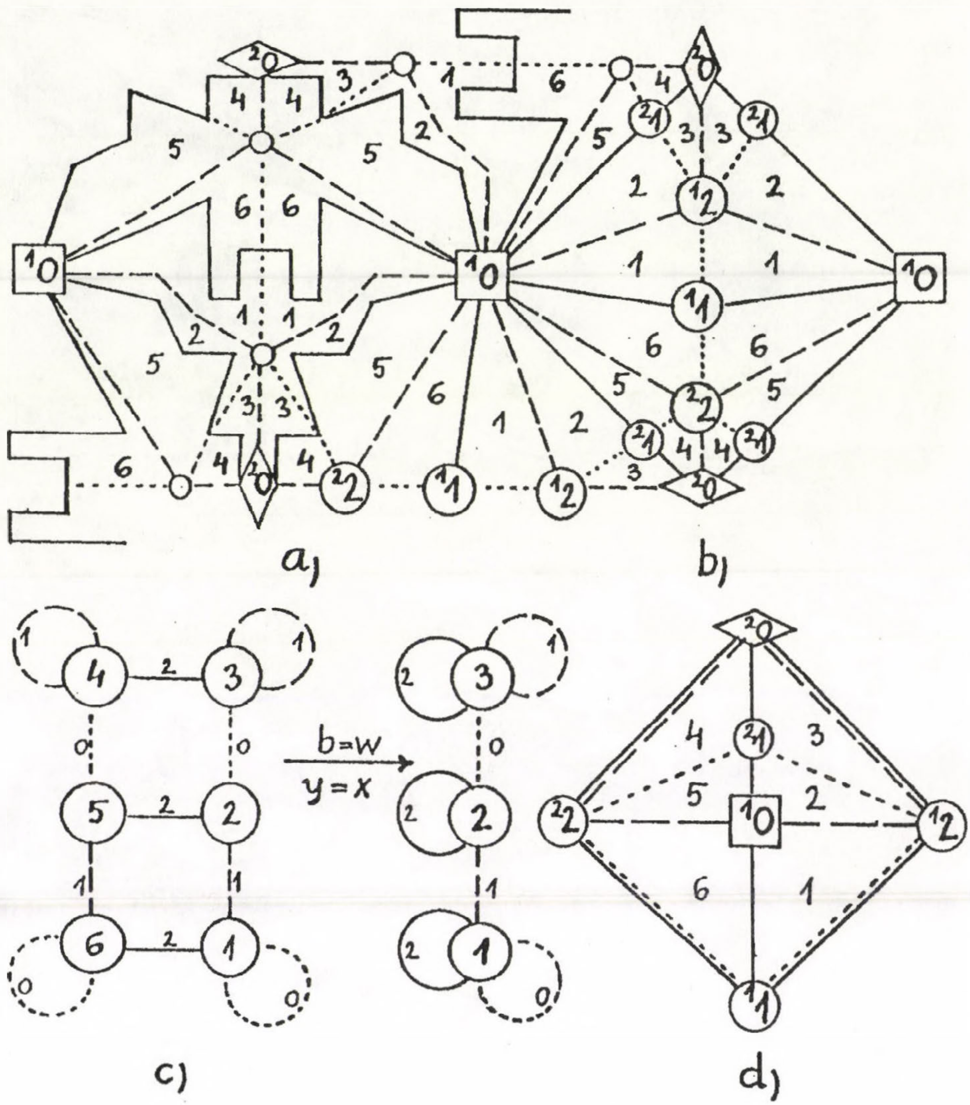


2. ábra

mátrixfüggvényt:

(2.2)
$$m_{ij}(1) = m_{ij}(2) = m_{ij}(5) = m_{ij}(6) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix};$$

$$m_{ij}(3) = m_{ij}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$



3. ábra

Például $m_{23}(1) = m_{23}(2) = m_{23}(5) = m_{23}(6) = 8$ jelenti, hogy az ${}^{1}0$ csúcsnál, a „szárnyak végpontjánál" az 1, 2, 5, 6 típusokból 16 baricentrikus háromszög találkozik 4 angyal, 4 ördög, összesen 8 sokszög alkotórészeként. Ellenőrizhetjük az (1.8) tulajdonságokat.

Az egymáshoz csatlakozó 1, 2, ..., 6 típusú háromszögek együtt egy $\mathcal{F}_\Gamma$ tartományt, a $\Gamma =$ **p4gm** *kristálycsoportnak egy alaptartományát* alkotják, mely egy „fél-angyalt" és egy „fél-ördögöt" tartalmaz. $\mathcal{F}_\Gamma$ képeivel hézagmentesen és egyrétűen köveződik ki a sík; ha az $\mathcal{F}_\Gamma$ „négyszög" $\overset{1}{\cdots\cdots}\overset{3}{---}$ oldalára, valamint az ezzel $\pi/2$ szöget bezáró $\overset{4}{---}\overset{6}{\cdots\cdots}$ oldalára tükrözünk, míg az $\overset{1}{\overline{}}$ és $\overset{6}{\overline{}}$ görbevonalú oldalakat ${}^{1}0$ körüli $2\pi/4 = \pi/2$ szögű 4-forgatással egymáshoz rendelve jutunk a szomszédos $\mathcal{F}_\Gamma$-képekhez ; aztán ezt az eljárást folytatjuk.

Az $\mathcal{F}_\Gamma$ tartomány „topologikus ragasztásával" jutunk a D-szimbólum által jellemzett $\mathcal{D} = \mathcal{C}/\Gamma \sim \mathbf{E}^2/\Gamma$ pályasokaság *(orbifold)* képéhez a 3.d) ábrán, melyet a D-diagramból olvashatunk le. Ehhez fontos az alábbi mátrixfüggvény:

(2.3) $$\mathcal{D} \ni D \to r_{ij}(D) := \min\left\{r \in \mathbf{N} : (\sigma_j\sigma_i)^r D = D\right\},$$

mely most a 3.c) ábráról leolvasható:

(2.4) $$r_{ij}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \text{állandó a } \mathcal{D} = \{1,2,3,4,5,6\} \text{ halmazon.}$$

Például $r_{01}(1) = 3$, mert $(\sigma_1\sigma_0)(\sigma_1\sigma_0)(\sigma_1\sigma_0)(1) = (1)$, hiszen $1\cdots\cdots1---2$ $2\cdots\cdots3---3\cdots\cdots2---1$, ahogy rendre a σ_0, σ_1 operációk szorzatát 3-szor alkalmazva visszajutunk a kiinduló csúcshoz. Na mármost értelmezhető a

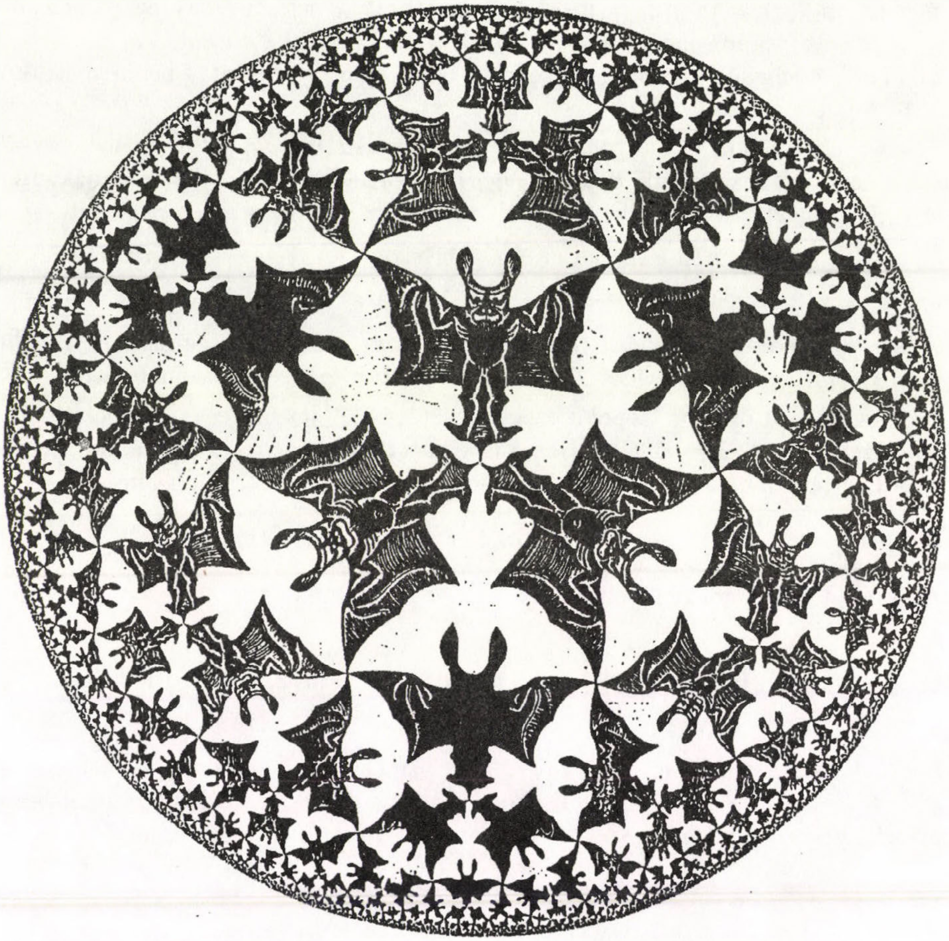
(2.5) $$\mathcal{D} \ni D \mapsto v_{ij}(D) = m_{ij}(D)/r_{ij}(D) \in \mathbf{N}$$

mátrixfüggvény, mely a Γ *csoporthoz tartozó forgatások rendjét adja meg az* i *és* j *oldalak találkozásánál.* Esetünkben

(2.6) $$v_{ij}(1) = v_{ij}(2) = v_{ij}(5) = v_{ij}(6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$
$$v_{ij}(3) = v_{ij}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

adódik (2.2) és (2.4) alapján. Mivel az (1.8) a)–c) tulajdonságok (2.3–4) képletekben leírt r_{ij} mátrixfüggvényre is teljesülnek, ezért így van ez a v_{ij} mátrixfüggvényre is. A $\Gamma =$ **p4gm** csoport forgatásrendjét, és még további jellemzését tartalmazza a 3.d) képhez tartozó „szignatura" [6]:

(2.7) $$\Gamma = \mathbf{p4gm} = \left(+, 0; [4]; \{(2)\}\right).$$



4. ábra

A [4] jelzi, hogy $^{1}0$ körül $v_{23}(1) = v_{23}(2) = v_{23}(5) = v_{23}(6) = 4$ a forgatás rendje; $^{2}1$ körül viszont $v_{02}(2) = v_{02}(3) = v_{02}(4) = v_{02}(5) = 1$, amit nem tüntetünk fel. A $\{(2)\}$ jelenti, hogy a 3.d) ábrán látható orbifold „peremén" $^{2}0$-nél $\pi/2$ a tüköregyenesek szöge, így az $^{2}0$ körüli forgatás rendje $2 = v_{12}(3) = v_{12}(4)$, míg $^{1}1$, $^{1}2$, $^{2}2$ körül a forgatás triviális rendje 1.

Kiderül, hogy van lehetőségünk a v_{ij} mátrixfüggvény módosítására. Mégpedig ezzel (2.5), vagyis

$$m_{ij} = r_{ij} \cdot v_{ij} \tag{2.8}$$

miatt az m_{ij} mátrixfüggvényt is változtathatjuk, és így újabb „Menny és pokol" *kövezéseket kaphatunk.* (2.4) alapján

$$\begin{aligned} &m_{01}(1) = m_{01}(2) = m_{01}(3) = 3x, && x \geq 1; \\ &m_{01}(4) = m_{01}(5) = m_{01}(6) = 3y, && y \geq 1; \\ &m_{12}(3) = m_{12}(4) = 2z, && z \geq 2; \\ &m_{12}(1) = m_{12}(2) = m_{12}(5) = m_{12}(6) = 2u, && u \geq 2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

A megfelelő Γ csoport szignatúrája a 3.d) ábrához kötődik:

$$\Gamma(\mathcal{D}, m_{ij}) = \big(+, 0; [u]; \{(x, y, z)\}\big), \tag{2.10}$$

ahol az $(u; x, y, z)$ természetes számokra a (2.9) egyenlőtlenségek teljesülnek. Éppen a 2. ábra kövezését kapjuk, ha

$$(u; x, y, z) = (4; 1, 1, 2). \tag{2.11}$$

Ha viszont a paraméterekre

$$(u; x, y, z) = (4; 1, 1, 3) \tag{2.12}$$

akkor a *Bolyai-Lobacsevszkij-féle* $\mathbf{H}^2$ *hiperbolikus síkban megvalósítható „angyal-ördög" kövezést láthatjuk* ESCHER *rajzán,* a 4. ábrán *a* $\mathbf{H}^2$ *sík Poincaré-féle körmodelljében.* A szerkesztés azon múlik, hogy $\pi/3$ szögű négyzetekkel a $\mathbf{H}^2$ sík tükrözésekkel kikövezhető.

Másrészt például

$$(u; x, y, z) = (3; 1, 1, 2) \tag{2.13}$$

esetén az $\mathbf{S}^2$ gömbfelületen megvalósítható „angyal-ördög" kövezést kaphatunk, hiszen $\pi/2$ szögű szabályos háromszögekkel a gömbfelület kikövezhető, és ebből 12-12 „angyal-ördög" alakítható ki.

Az (1.9) görbületi állandó teljes jellemzést ad arról, mely paraméterekre, mely síkban valósítható meg a kövezés:

(2.14)
$$K(\mathcal{D}, m_{ij}) = \sum_{D\in\mathcal{D}} \left(\frac{1}{m_{01}(D)} + \frac{1}{m_{12}(D)} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{2u} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{2u} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3y} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{2}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{3y} + \frac{1}{2u} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3y} + \frac{1}{2u} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{u} + \frac{1}{z} - 3,$$
$$x, y \geq 1; \quad u, z \geq 2.$$

Ha $K > 0$, vagyis $(u; x, y, z) = (3; 1, 1, 2)$, illetve $(2; 1, 1, z)$ $z \geq 2$ végtelen sok esetben az $\mathbf{S}^2$ gömbfelület kövezését nyerjük. Ha $K = 0$, vagyis euklideszi kövezést szeretnénk, ez teljesül az $(u; x, y, z) = (4; 1, 1, 2)$ kövezésen kívül a $(3; 1, 1, 3)$ esetben is. Ennek szerkesztését az olvasóra bízzuk. Hiperbolikus kövezést kapunk a fennmaradó végtelen sok esetben, ha $K < 0$. Csak megemlítjük, hogy x, y jelentése: x fejű, $2x$ szárnyú és lábú „angyallal", y fejű, $2y$ szárnyú és lábú „ördöggel" is kikövezhető a hiperbolikus sík.

További szempontokat találhatunk A. W. M. DRESS és D. H. HUSON angol-francia nyelvű [2] dolgozatában, ahol euklideszi általánosításokat osztályoznak számítógép segítségével. Más nem euklideszi vonatkozásokat is említ a [6] dolgozat.

3. A LAPTRANZITÍV (HOMOGÉN) HÁROMSZÖGFELOSZTÁSOK OSZTÁLYOZÁSA

Azokat a $(\mathcal{H}, \Gamma)$ háromszögfelosztásokat osztályozzuk egyszerre az $\mathbf{S}^2$ gömbfelületen, az $\mathbf{E}^2$ euklideszi, továbbá a $\mathbf{H}^2$ hiperbolikus síkon, ahol a $\mathcal{H}$ felosztás Γ szimmetriacsoportja *tranzitíven* hat a háromszöglapokon, azaz $\mathcal{H}$ bármely két H_1 és H_2 háromszögéhez létezik (legalább) egy $\gamma \in \Gamma$ egybevágóság mely H_1-et H_2-be (és az egész $\mathcal{H}$ kövezést önmagára) képezi: $H_1^\gamma = H_2$. Ha pontosan egy ilyen γ létezik, akkor bármely háromszög a Γ *alaptartománya*, különben bármely H háromszöglap Γ^2 jelű stabilizátora 1-nél több, mégpedig 2, 3 vagy 6 elemet tartalmaz. Ennek megfelelően a felosztás $(\mathcal{D}, m_{ij})$ D-szimbólumában a $\mathcal{D}$ halmaz 6,3,2,1 elemet tartalmaz. A σ_0, σ_1, σ_2 operációkat ugyanúgy értelmezzük mint korábban. A

(3.1)
$$\mathcal{D} \ni D \mapsto m_{ij}(D) \in \mathbf{N}, \quad i, j \in I = \{0, 1, 2\}$$

D-mátrixfüggvény alakja most

(3.2)
$$m_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & m_{12} \\ 2 & m_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad 2 < m_{12} = m_{21};$$

$m_{01} = 3$ jelenti, hogy háromszögköveink vannak; $m_{12}(D)$ jelenti, hogy a D pálya baricentrikus háromszögeinek 0 jelű csúcsánál ennyi eredeti háromszögkő található, vagyis a $\mathcal{C}$ felbontásban $2 \cdot m_{12}(D)$ baricentrikus háromszög találkozik váltakozva $1 - - -$ és 2 ——— jelű oldalak mentén. Az a tény, hogy a Γ szimmetriacsoport laptranzitív (homogén), úgy is kifejezhető, hogy a 2-élek (vagyis a σ_2 operáció) elhagyásával megmaradó $\mathcal{D}^2 = \mathcal{D}_{01}$ diagram továbbra is összefüggő. A $\mathcal{D}_{01}$ diagram az $m_{01} = 3$ mátrixelemmel együtt jellemzi a Γ^2 lapstabilizátort és 4 főeset van, jelölésben (5. ábra és Táblázat)

(3.3)

a) $\Gamma^2 = \mathbf{3m}$, $\mathcal{D}$ egy csúcsú 5. ábra 1. Család ${}^{\mathbf{3m}}_{6}\Gamma(u)$ $u \geq 3$

b) $\Gamma^2 = \mathbf{3}$, $\mathcal{D}$ két csúcsú 5. ábra 1. Család ${}^{\mathbf{3}}_{3}\Gamma_1(2u)$ $u \geq 2$ és

${}^{\mathbf{3}}_{3}\Gamma_2(u)$ $u \geq 3$

c) $\Gamma^2 = m$, $\mathcal{D}$ három csúcsú 5. ábra 2. Család ${}^{\mathbf{m}}_{2}\Gamma_1(2u; v)$ $u \geq 2$, $v \geq 3$ és

5. ábra 1. Család ${}^{\mathbf{m}}_{2}\Gamma_2(3u)$ $u \geq 1$

d) $\Gamma^2 = 1$, $\mathcal{D}$ hat csúcsú az 5. ábrán láthatjuk a 8 alaptartományt;

az 1. Családban: $\Gamma_3(6u)$, $\Gamma_4(3u)$, $\Gamma_6(6u)$, $\Gamma_8(3u)$;

a 2. Családban: $\Gamma_2(4u; 2v)$, $\Gamma_5(4u; v)$, $\Gamma_7(2u, v)$;

a 3. Családban: $\Gamma_1(2u, 2v, 2w)$.

Itt **3m** jelöli a $\pi/3$ szögtartomány száraira történő tükrözések által generált 6 elemű csoportot, **3** jelöli a $2\pi/3$ szögű forgatás meghatározta 3 elemű csoportot, **m** jelöli az egyenestükrözés által meghatározott 2 elemű csoportot, **1** az 1 elemű triviális csoport. A 4 főeseten belüli alapesetek úgy jönnek létre, hogy a Γ^2-höz tartozó $I = 0, 1$, vagyis 1-dimenziós $(\mathcal{D}_{01}, m_{ij})$ D-szimbólumot gazdagítjuk a ——— 2-élek, vagyis a σ_2 operáció bevezetésével, és az m_{12} mátrixelem(ek)

$$m_{12}(D) = r_{12}(D) \cdot v_{12}(D) \tag{3.4}$$

szerinti megválasztásával, ahogy ezt (2.8)-ban korábban tettük az (1.8) formula követelményei szerint. Ehhez a $\cdots\cdots$ 0-élek (σ_0 operáció) elhagyásával nyert $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}_{12}$ diagram komponenseit és a hozzájuk tartozó Γ^0 háromszögcsúcs-stabilizátor részcsoportokat kell megvizsgálni.

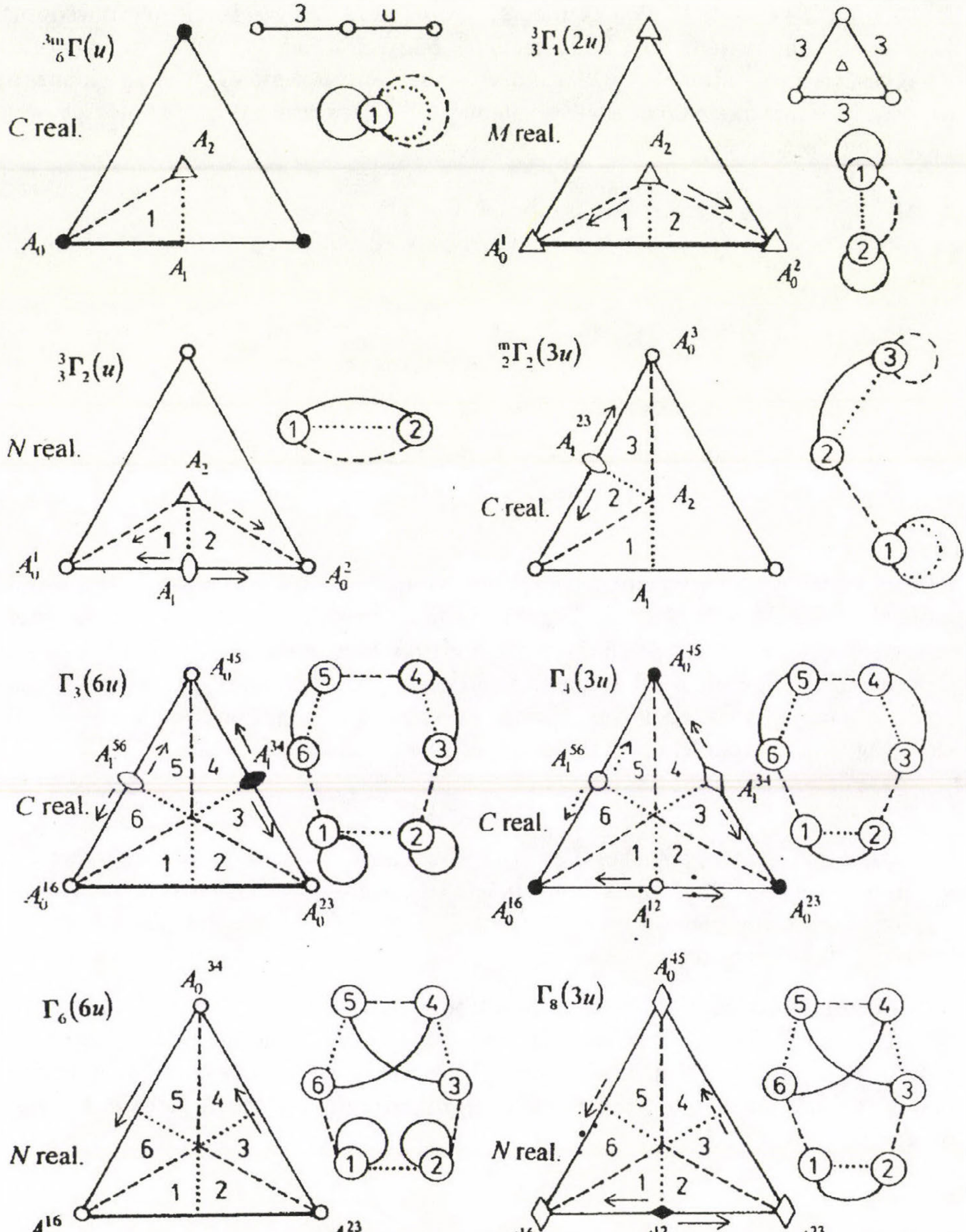
3.1. Példaként nézzük az 5/1. ábrán látható, és a Táblázat 1. Családjában szereplő ${}^{\mathbf{m}}_{2}\Gamma_2(3u)$ esetet. Ekkor $\Gamma^2 = \mathbf{m}$ a H háromszögkő stabilizátora a $\mathcal{D}_{01}$ diagram 3 csúcsú a baricentrikus felbontás 3 pályájának megfelelően: az $r_{01} = 3$ mátrixelem $m_{01} = 3$ miatt valóban $v_{01} = 1$ triviális forgatásrendhez vezet. Mindez a σ_0 és σ_1 operációk

$$\cdots\cdots \sigma_0 : (1)(2,3) \qquad - - - \sigma_1 : (1,2)(3) \tag{3.5}$$

alakjából és az ábráról leolvasható. Vezessük be a σ_2 operációt

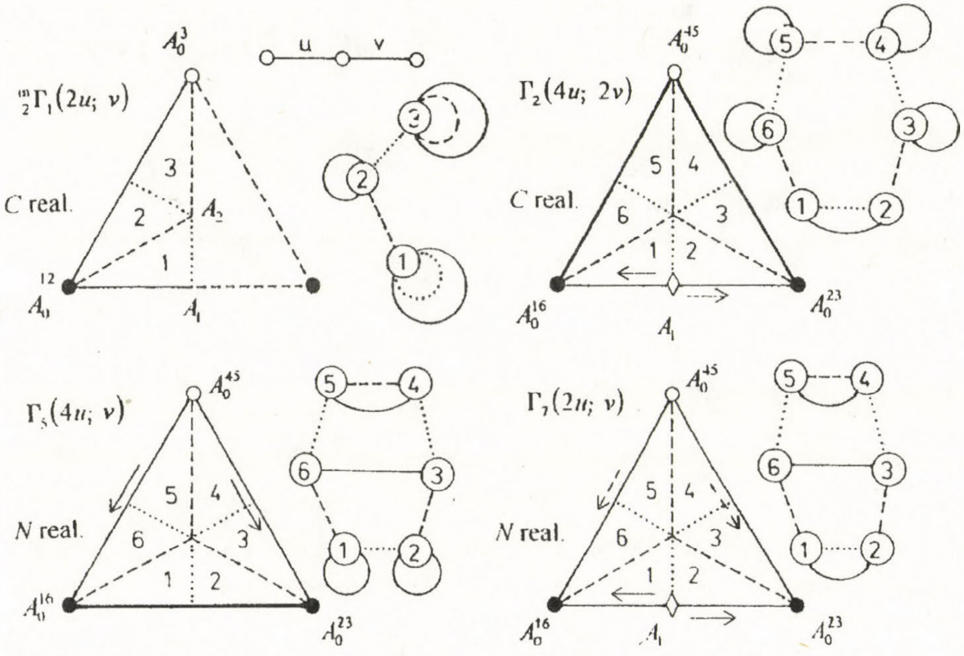
$$\text{———} \; \sigma_2 : (1)(2,3) \tag{3.6}$$

1. Család
8 sorozat

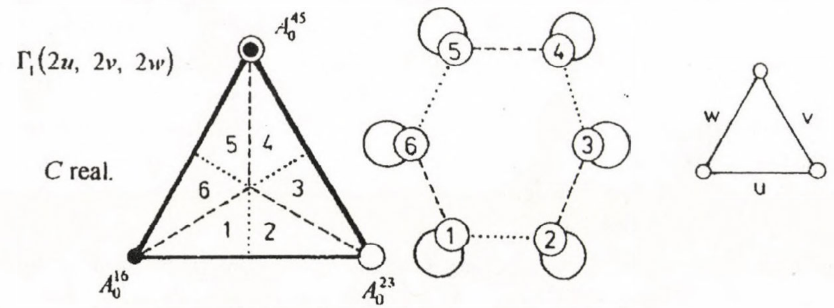


5/1. ábra

2.Család
4 sorozat



3.Család
1 sorozat



5/2. ábra

szerint. Ekkor a $\mathcal{D}$ diagramot jellemző r_{ij} mátrixfüggvény:

$$(3.7)\qquad r_{ij}(1)=\begin{pmatrix}1&3&1\\3&1&3\\1&3&1\end{pmatrix},\qquad r_{ij}(2)=r_{ij}(3)=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&1&3\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

Az $r_{12}=3$ elem bármely $v_{12}=u$ $(u\geq 1)$ természetes számmal való szorzata lehet m_{12}. Ez a paraméter szerepel a ${}^{\mathbf{m}}_{2}\Gamma_2(3u)$ zárójelében. A H háromszög csúcsai az előbbi csoportnál egymásba mennek át, és a csúcsok Γ^0 stabilizátorát $\mathcal{D}^0=\mathcal{D}_{12}$ és $m_{12}=3u$ már jellemzi. A Γ^0 stabilizátorban levő forgáscsoport rendje lesz éppen u. A korábbiaknak megfelelően olvasható ki a

$$(3.8)\qquad {}^{\mathbf{m}}_{2}\Gamma_2(3u)=\big(+,0;[2];\{(u,2)\}\big)$$

szignatúra és a görbületi állandó

$$(3.9)\qquad K=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3u}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3u}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3u}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{u}-\frac{1}{2}$$

Ha $K>0$, azaz $u=1$, az $\mathbf{S}^2$ gömbfelületen megvalósítható háromszögkövezéshez jutunk (biztatjuk az Olvasót ennek megszerkesztésére, 4 háromszöggel megvalósítható).

Ha $K=0$, azaz $u=2$, az $\mathbf{E}^2$ euklideszi sík kövezését kapjuk meg a **9. cmm2** kristálycsoport szerint.

Ha $K<0$, azaz $u\geq 3$, akkor végtelen sok esetben a $\mathbf{H}^2$ hiperbolikus sík kövezéséhez jutunk.

A Táblázatban szerepel a $\mathbf{\Gamma}\sim\mathbf{\Gamma}_2(\bar{u}=u,\ \bar{v}=2)$ *izomorfizmus,* mely arra utal, hogy a megadott $\mathbf{\Gamma}_2$ csoport (2. Család) fundamentális háromszögtartományával a megadott forgásrendek mellett éppen az itteni $\mathbf{\Gamma}$-val izomorf kristálycsoporthoz jutunk. De a kövezések mások lesznek, nem lesznek ekvivariánsak. A *C real*(izáció) rövid alakja arra utal, hogy konvex (nem-szabályos) egyenlőszárú háromszögekkel a megadott $\mathbf{\Gamma}$ csoport transzformációival létrehozott kövezés *saját szimmetriacsoportja:* $\mathrm{Sym}\,\mathcal{H}=\mathbf{\Gamma}$ éppen az itteni $\mathbf{\Gamma}={}^{\mathbf{m}}_{2}\Gamma_2(3u)$ csoporttal teljesül. Tehát nem kapunk $\mathbf{\Gamma}$-nál gazdagabb $\mathrm{Sym}\,\mathcal{H}$ csoportot.

A kövezés szerkesztésében még szabadsági fokunk is van. Például az euklideszi esetben egy tetszőleges téglalaprács és a lapközéppontok kijelölése után, a téglalapok átlóit a középpontra szimmetrikusan, de „szinte tetszőleges ívvel" rajzolhatjuk meg. Nem-konvex megvalósítás („*N real*") általában máskor is célhoz vezet. Ha azonban a háromszögoldalakra való tükrözéseket tartalmaz a csoport, akkor csak a kövek megjelölésével — erre az „*M real*" rövidítés utal — juthatunk egy kívánt (nem-maximális) $\mathbf{\Gamma}$ csoporthoz.

Mindez arra vezet, hogy *az osztályozás követelményét pontosabban kell megfogalmaznunk,* ahogy az (1.8) formula után már érzékeltettük.

Definíció 3.1. A $(\mathcal{T},\Gamma)$ és $(\mathcal{T}',\Gamma')$ (háromszög) kövezéseket egy osztályba soroljuk (ekvivariánsnak nevezzük), ha létezik egy ekvivariáns $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ topologikus leképezés, azaz $\Gamma' = \varphi^{-1}\Gamma\varphi$ vagyis φ összhangban van a megfelelő transzformációcsoportok hatásával. ■

A D-szimbólumok izomorfizmusa éppen biztosítani fogja ezt az ekvivarianciát.

Definíció 3.2. A $(\mathcal{D}, m_{ij})$ és $(\mathcal{D}', m'_{ij})$ *D-szimbólumok izomorfak,* ha létezik olyan $\Psi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ bijekció, mely megtartja a σ_i illetve σ'_i operációkat és a megfelelő mátrixfüggvényeket, azaz

$$\begin{gathered}[\sigma_i(D)]\Psi = \sigma'_i[(D)\Psi] \quad \text{és} \quad m'_{ij}(D\Psi) = m_{ij}(D) \\ \text{minden } D \in \mathcal{D},\ i,j \in I = \{0,1,2\} \text{ esetén teljesül.}\end{gathered} \tag{3.10}$$
■

Tétel 3.1. (A. W. M. DRESS [1]). *Két kövezés akkor és csak akkor ekvivariáns, ha a megfelelő D-szimbólumaik izomorfak.* ■

A fentiek szerint az 5. ábráról leolvashatjuk, hogy az $\mathbf{S}^2$ gömbön a 13 sorozatban $(3+1+3+1+0+1+0+1)+(\infty+1+\infty+\infty)+\infty$ háromszögkövezés létezik, az $\mathbf{E}^2$ euklideszi síkon viszont véges sok:

$$(1+1+1+1+1+1+1+1)+(3+1+2+3)+3 = 22. \tag{3.11}$$

(B. N. DELONE (DELAUNAY) [5] csupán $\mathbf{E}^2$-ben tárgyalt eredményét kaptuk vissza.) Az 5. ábrán 3 családba sorolt 13 sorozat viszont egyszerre adja meg az osztályozást $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{E}^2$ és $\mathbf{H}^2$ esetére.

Ehhez már csak a családba sorolás elvét kell megadnunk, mely a kövezések *szimmetriatörésének* és a D-szimbólumok *D-morfizmusának* fogalmán nyugszik.

Definíció 3.3. A $(\mathcal{T},\Gamma)$ kövezést a $(\mathcal{T}',\Gamma')$ kövezés *szimmetriatörésének* nevezzük, ha létezik olyan $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ topologikus leképezés, hogy $\varphi^{-1}\Gamma\varphi < \Gamma'$, azaz φ a Γ csoport hatását a Γ' egy részcsoportjának hatására képezi le. ■

Definíció 3.4. A $(\mathcal{D}, m_{ij})$ D-szimbólumnak egy Ψ D-morfizmusnál származó képe a $(\mathcal{D}', m'_{ij})$ D-szimbólum, ha $\Psi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ olyan szürjekció (ráképezés), mely megtartja a σ_i, illetve σ'_i operációkat és megfelelő mátrixfüggvényeket, azaz (3.10) teljesül. ■

Tétel 3.2. *A $(\mathcal{T},\Gamma)$ kövezés a $(\mathcal{T}',\Gamma')$ kövezés szimmetriatörése akkor és csak akkor, ha megfelelő $(\mathcal{D}, m_{ij})$ és $(\mathcal{D}', m'_{ij})$ D-szimbólumokra, a második D-morfizmussal keletkezik az elsőből.* ■

Látható, hogy a 3.2. Tételnek speciális esete a 3.1. Tétel.

A **3.1. Példa** folytatásaként rámutatunk arra, hogy a ${}^{\mathbf{m}}_{2}\Gamma_2(3u)$ csoporthoz tartozó kövezés $\bar{u} = 3u$ esetén szimmetriatörése a ${}^{\mathbf{3m}}_{6}\Gamma(\bar{u})$ kövezésnek. Ellenőrizhetjük a feltételeket. Geometriailag ez azt jelenti, hogy az $u = 2$ euklideszi esetben megválaszthatjuk úgy a ${}^{\mathbf{m}}_{2}\Gamma_2(3u)$ kövezésének téglalapoldalait ($1 : \sqrt{3}/2$ arányban), hogy egyenesvonalakkal rajzolt háromszögeink éppen a ${}^{\mathbf{3m}}_{6}\Gamma(\bar{u} = 3u)$ szabályos háromszögkövezését adják. Ez azt is jelenti, hogy a $(\mathcal{H},\ \mathbf{\Gamma} = {}^{\mathbf{m}}_{2}\mathbf{\Gamma}_2(3u))$ kövezés automorfizmus-csoportja $\mathrm{Aut}\,\mathcal{H}$ éppen ekvivariáns a szabályos háromszögkövezés ${}^{\mathbf{3m}}_{6}\mathbf{\Gamma}(\bar{u} = 3u)$ csoportjával. A Táblázatban $N(\mathbf{\Gamma}) = \mathbf{\Gamma}$ azt jelenti, hogy ebben az $\mathrm{Aut}\,\mathcal{H} = {}^{\mathbf{3m}}_{6}\mathbf{\Gamma}(\bar{u} = 3u)$ maximális csoportban $\mathbf{\Gamma}$ *normalizátora* önmaga. Általánosan is értelmezhetjük a fenti fogalmak megfelelőit.

Definíció 3.5. Bármely $(\mathcal{T}, \Gamma)$ kövezéshez képezhető a maximális $\Gamma^\star$ szimmetriájú $(\mathcal{T}^\star \sim \mathcal{T}, \Gamma^\star = \mathrm{Aut}\,\mathcal{T})$ kövezés, melyhez a legkisebb elemszámú D-szimbólum tartozik. Ha $\Gamma^\star$ egybevágóságcsoportként valósítható meg, akkor ez a kövezés lesz a megfelelő kövezéshalmaz vezető (reprezentáns) kövezése, szimmetriatörései alkotják a halmazhoz tartozó kövezéseket. Azt mondjuk, hogy a kövezéshalmaz *topologikus típusát* a $(\mathcal{T}, \mathrm{Aut}\,\mathcal{T}) \sim (\mathcal{T}^\star, \Gamma^\star)$ ekvivarianciaosztály jellemzi. Az ehhez tartozó $\mathcal{D}$ D-diagram/gráf a $\sigma_i \quad i \in I = \{0, 1, 2\}$ operációkkal jellemzi a $(\mathcal{T}, \Gamma)$ kövezés topologikus családját, melyből a D-mátrixfüggvény alkalmas, további D-morfizmust nem megengedő választásával kapjuk a topologikus családhoz tartozó típusokat, majd szimmetriatörésekkel a típusokhoz tartozó kövezéseket. ■

Tétel 3.3. *A $\Pi^2(\mathbf{S}^2, \mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2)$ sík laptranzitív $(\mathcal{H}, \Gamma)$ háromszögkövezései 3 topologikus családba sorolhatók a $(\mathcal{H}, \mathrm{Aut}\,\mathcal{H})$ kövezések D-diagramjai szerint, a $\mathcal{H}$ kövezés csúcsai $\Gamma^\star = \mathrm{Aut}\,\mathcal{H}$ szerinti ekvivalenciaosztályainak megfelelően. A $(\mathcal{H}, \Gamma)$ kövezések D-diagramjai szerint 13 kövezéssorozat keletkezik, melyek a szabad m_{12} paraméterek megválasztásától függően rendre az $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{E}^2$, $\mathbf{H}^2$ síkban realizálhatók attól függően, hogy a K görbületi állandó pozitív, nulla vagy negatív.* ■

Megjegyezzük, hogy a 2. és 3. családnál szereplő sorozatok nem egységesen sorolódnak a megfelelő családba. Például a 2. család ${}^{\mathbf{m}}_{2}\Gamma_1(2u, v)$ jellemző sorozatának $2u = v$ paraméterekhez tartozó elemei az 1. család ${}^{\mathbf{3m}}_{6}\Gamma(\bar{u} = 2u = v)$ sorozatához tartoznak. A $\Gamma_7(2u, v)$ sorozatának $2u \neq v$ paraméterű kövezései (például az $\mathbf{E}^2$-beli $\mathbf{p4}(4,4)$ és $\mathbf{p6}(6,3)$) a 2. családhoz tartoznak. De $2u = v$ esetén az 1. családhoz: ${}^{\mathbf{3m}}_{6}\Gamma(\bar{u} = 2u = v)$ (például az $\mathbf{E}^2$-beli $\mathbf{p6}(3,6)$ kövezéshez a gazdagabb ${}^{\mathbf{3m}}_{6}\Gamma(6) = \mathbf{p6mm}$ kristálycsoportú típus tartozik.)

Ez az osztályozás akár számítógéppel is elvégezhető lenne, hiszen minden lépése algoritmizálható. D. H. Huson és O. Delgado-Friedrichs „REPTILE" nevű programja meg is rajzolja a D-szimbólummal megadott 2-kövezést a megfelelő sík euklideszi modelljében. Prok István tanszéki kollégám az $\mathbf{E}^2$ euklideszi sík 17 kristálycsoportja szerinti mintákat tud rajzoltatni számítógéppel. A kutatásokat a térre is kiterjesztettük [3,7,8,10]. A téma irodalmából csak a szövegben is említetteket soroljuk fel.

Megköszönöm Prok István és Szirmai Jenő kollégáimnak a kézirat nyomdai előállításához nyújtott segítségét.

TÁBLÁZAT
A SÍK LAPTRANZITÍV HÁROMSZÖGKÖVEZÉSEINEK OSZTÁLYOZÁSA

1. Család

${}^{\mathbf{3m}}_{6}\mathbf{\Gamma}(u)$, $3 \le u$; *maximális, C real.*= konvex kövekkel megvalósítható $\circ$ $\mathbf{\Gamma} \sim \mathbf{\Gamma}_1(\bar{u} = 3,\ \bar{v} = 2,\ \bar{w} = u)$ **(3. Cs.)**, $N(\mathbf{\Gamma}) = \mathbf{\Gamma}$ $\circ$ $m_0 : A_1A_2$, $m_1 : A_2A_0$, $m_2 : A_0A_1$ — $m_0^2, m_1^2, m_2^2;\ (m_0m_1)^3,\ (m_0m_2)^2,\ (m_1m_2)^u$ $\circ$ $\mathbf{\Gamma}^0(A_0) = \mathbf{um}$ $\circ$ (u) — $\mathbf{S}^2 : (3), (4), (5)$ — $\mathbf{E}^2 : (6)$ **17. p6mm** — $\mathbf{H}^2 : 7 \le u$ ■

${}^{\mathbf{3}}_{3}\mathbf{\Gamma}_1(2u)$, $2 \le u$; *M real.*= csak megjelölt kövekkel valósítható meg $\circ$ $\mathbf{\Gamma} \sim \mathbf{\Gamma}_5(\bar{u} = u,\ \bar{v} = 3)$ **(2. Cs.)**, $N(\mathbf{\Gamma} = {}^{\mathbf{3m}}_{6}\mathbf{\Gamma}(\bar{u} = 2u)$ $\circ$ $m : A_0^1A_0^2$, $r : A_2A_0^1 \to A_2A_0^2$ — $m^2, r^3;\ (mrmr^{-1})^u$ $\circ$ $\mathbf{\Gamma}^0(A_0^1, A_0^2) = \mathbf{um}$ $\circ$ (u) — $\mathbf{S}^2 : (2)$ — $\mathbf{E}^2 : (3)$ **15. p31m** — $\mathbf{H}^2 : 4 \le u$ ■

${}^{\mathbf{3}}_{3}\mathbf{\Gamma}_2(u)$, $3 \le u$; *N real.*= nemkonvex kövekkel megvalósítható $\circ$ $\mathbf{\Gamma} \sim \mathbf{\Gamma}_7(\bar{u} = u,\ \bar{v} = 3)$ **(2. Cs.)**, $N(\mathbf{\Gamma}) = {}^{\mathbf{3m}}_{6}\mathbf{\Gamma}(\bar{u} = u)$ $\circ$ $r_1 : A_2A_0^1 \to A_2A_0^2$, $r_2 : A_1A_0^1 \to A_1A_0^2$ — $r_1^3, r_2^2;\ (r_1r_2)^u$ $\circ$ $\mathbf{\Gamma}^0(A_0^1, A_0^2) = \mathbf{u}$ $\circ$ (u) — $\mathbf{S}^2 : (3), (4), (5)$ — $\mathbf{E}^2 : (6)$ **16. p6** — $\mathbf{H}^2 : 7 \le u$ ■

${}^{\mathbf{m}}_{2}\mathbf{\Gamma}_2(3u)$, $1 \le u$; *C real.* $\circ$ $\mathbf{\Gamma} \sim \mathbf{\Gamma}_2(\bar{u} = u,\ \bar{v} = 2)$ **(2. Cs.)**, $N(\mathbf{\Gamma}) = \mathbf{\Gamma}$ $\circ$ $m_1 : A_1A_0^3$, $m_2 : A_0^{12}A_1$, $r : A_1A_0^{12} \to A_1A_0^3$ — $m_1^2, m_2^2, r^2;\ (m_1m_2)^2,\ (m_1rm_2r)^u$ $\circ$ $\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{12}, A_0^3) = \mathbf{um}$ $\circ$ (u) — $\mathbf{S}^2 : (1)$ — $\mathbf{E}^2 : (2)$ **9. cmm2** — $\mathbf{H}^2 : 3 \le u$ ■

$\mathbf{\Gamma}_3(6u)$, $1 \le u$; *C real.* $\circ$ $N(\mathbf{\Gamma}) = {}^{\mathbf{m}}_{2}\mathbf{\Gamma}_2(\bar{u} = 2u)$ $\circ$ $m : A_0^{16}A_0^{23}$, $r_1 : A_1^{34}A_0^{23} \to A_1^{34}A_0^{45}$, $r_2 : A_1^{56}A_0^{45} \to A_1^{56}A_0^{16}$ — $m^2, r_1^2, r_2^2;\ (mr_1r_2mr_2r_1)^u$ $\circ$ $\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{16}, A_0^{23}, A_0^{45}) = \mathbf{um}$ $\circ$ (u) — $\mathbf{E}^2 : (1)$ **7. pmg2** — $\mathbf{H}^2 : 2 \le u$ ■

$\mathbf{\Gamma}_4(3u)$, $1 \le u$; *C real.* $\circ$ $N(\mathbf{\Gamma}) = {}^{\mathbf{3m}}_{6}\mathbf{\Gamma}(\bar{u} = 3u)$ $\circ$ $r_1 : A_1^{12}A_0^{16} \to A_1^{12}A_0^{23}$, $r_2 : A_1^{34}A_0^{23} \to A_1^{34}A_0^{45}$, $r_3 : A_1^{56}A_0^{45} \to A_1^{56}A_0^{16}$, — $r_1^2, r_2^2, r_3^2;\ (r_1r_2r_3)^u$ $\circ$ $\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{16}, A_0^{23}, A_0^{45}) = \mathbf{u}$ $\circ$ (u) — $\mathbf{S}^2 : (1)$ — $\mathbf{E}^2 : (2)$ **2. p2** — $\mathbf{H}^2 : 3 \le u$ ■

$\mathbf{\Gamma}_6(6u)$, $1 \le u$; *N real.* $\circ$ $N(\mathbf{\Gamma}) = {}^{\mathbf{m}}_{2}\mathbf{\Gamma}_2(\bar{u} = 2u)$ $\circ$ $m : A_0^{16}A_0^{23}$, $g : A_0^{23}A_0^{34} \to A_0^{34}A_0^{16}$ — $m^2;\ (mg^2mg^{-2})^u$ $\circ$ $\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{16}, A_0^{23}, A_0^{45}) = \mathbf{um}$ $\circ$ (u) — $\mathbf{E}^2 : (1)$ **5. cm** — $\mathbf{H}^2 : 2 \le u$ ■

$\mathbf{\Gamma}_8(3u)$, $1 \le u$; *N real.* $\circ$ $N(\mathbf{\Gamma}) = {}^{\mathbf{m}}_{2}\mathbf{\Gamma}(\bar{u} = u)$ $\circ$ $r : A_1^{12}A_0^{16} \to A_1^{12}A_0^{23}$, $g : A_0^{23}A_0^{45} \to A_0^{45}A_0^{16}$ — $r^2;\ (rg^2)^u$ $\circ$ $\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{16}, A_0^{23}, A_0^{45}) = \mathbf{u}$ $\circ$ (u) — $\mathbf{S}^2 : (1)$ — $\mathbf{E}^2 : (2)$ **8. pgg2** — $\mathbf{H}^2 : 3 \le u$ ■

2. Család

${}^{\mathbf{m}}_{2}\mathbf{\Gamma}_1(2u;v)$, $2 \le u$; $3 \le v$; *maximális, ha* $2u \ne v$, *C real.* $\circ$ ha $2u = v$ akkor ${}^{\mathbf{3m}}_{6}\mathbf{\Gamma}(\bar{u} = 2u = v)$ szupercsoport **(1. Cs.)**, *M real.* $\circ$ $\mathbf{\Gamma} \sim \mathbf{\Gamma}_1(\bar{u} = 2, \bar{v} = u, \bar{w} = v)$ **(3. Cs.)** $\circ$ $m_0 : A_1A_0^3$, $m_1 : A_0^3A_0^{12}$, $m_2 : A_0^{12}A_1$ — m_0^2, m_1^2, m_2^2; $(m_0m_1)^v$, $(m_0m_2)^2$, $(m_1m_2)^u$ $\circ$ ${}^1\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{12}) = \mathbf{um}$, ${}^2\mathbf{\Gamma}^0(A_0^3) = \mathbf{vm}$ $\circ$ $(u;v)$ — $\mathbf{S}^2$: $(2;v)$, $(2;4)$ *nem-maximális;* $(3;3)$; $(3;4)$, $(4;3)$; $(3;5)$, $(5;3)$ — $\mathbf{E}^2$: $(3;6)$ *nem-maximális* **17. p6mm;** $(4;4)$ **11. p4mm;** $(6;3)$ **17. p6mm** — $\mathbf{H}^2$: $\frac{1}{2} > \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ ■

$\mathbf{\Gamma}_2(4u;2v)$, $1 \le u$, $2 \le v$; *C real.* $\circ$ $N(\mathbf{\Gamma}) = {}^{\mathbf{m}}_{2}\mathbf{\Gamma}_1(\bar{u} = 2u;\ \bar{v} = 2v)$ $\circ$ $m_1 : A_0^{23}A_0^{45}$, $m_2 : A_0^{45}A_0^{16}$, $r : A_1A_0^{16} \to A_1A_0^{23}$ — m_1^2, m_2^2, r^2; $(m_1m_2)^v$, $(m_1rm_2r)^u$ $\circ$ ${}^1\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{16}, A_0^{23}) = \mathbf{um}$, ${}^2\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{45}) = \mathbf{vm}$ $\circ$ $(u;v)$ — $\mathbf{S}^2$: $(1;v)$, $(1;2)$ *nem-maximális* — $\mathbf{E}^2$: $(2;2)$ **9. cmm2** — $\mathbf{H}^2$: $1 > \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ ■

$\mathbf{\Gamma}_5(4u;v)$, $1 \le u$, $3 \le v$; *N real.* $\circ$ $N(\mathbf{\Gamma}) = {}^{\mathbf{m}}_{2}\mathbf{\Gamma}_1(\bar{u} = 2u;\ \bar{v} = v)$ $\circ$ $m : A_0^{16}A_0^{23}$, $r : A_0^{45}A_0^{23} \to A_0^{45}A_0^{16}$ — m^2, r^v; $(mrmr^{-1})^u$ $\circ$ ${}^1\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{16}, A_0^{23}) = \mathbf{um}$, ${}^2\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{45}) = \mathbf{v}$ $\circ$ $(u;v)$ — $\mathbf{S}^2$: $(1;v)$, $(1;4)$ *nem-maximális;* $(2;3)$ — $\mathbf{E}^2$: $(3;3)$ **15. p31m;** $(2;4)$ **12. p4gm** — $\mathbf{H}^2$: $1 > \frac{1}{u} + \frac{2}{v}$ ■

$\mathbf{\Gamma}_7(2u;v)$, $2 \le u$, $3 \le v$; *N real.* $\circ$ $N(\mathbf{\Gamma}) = {}^{\mathbf{m}}_{2}\mathbf{\Gamma}_1(\bar{u} = u;\ \bar{v} = v)$ $\circ$ $r_1 : A_1A_0^{16} \to A_1A_0^{23}$, $r_2 : A_0^{45}A_0^{23} \to A_0^{45}A_0^{16}$ — r_1^2, r_2^v; $(r_1r_2)^u$ $\circ$ ${}^1\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{16}, A_0^{23}) = \mathbf{u}$, ${}^2\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{45}) = \mathbf{v}$ $\circ$ $(u;v)$ — $\mathbf{S}^2$: $(2;v)$, $(2;4)$ *nem-maximális;* $(3;3)$; $(3;4)$, $(4;3)$; $(3;5)$, $(5;3)$ — $\mathbf{E}^2$: $(3;6)$ *nem-maximális* **16. p6;** $(4;4)$ **10. p4;** $(6;3)$ **16. p6** — $\mathbf{H}^2$: $\frac{1}{2} > \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ ■

3. Család

$\mathbf{\Gamma}_1(2u, 2v, 2w)$, $2 \le u \le v \le w$; *maximális, ha* $u < v < w$, *C real.* $\circ$ ha $u = v < w$, akkor ${}^{\mathbf{m}}_{2}\mathbf{\Gamma}_1(\bar{u} = u = v;\ \bar{v} = w) = N(\mathbf{\Gamma})$ *a maximális* **(2. Cs.)**, *M real.* $\circ$ ha $u < v = w$, akkor ${}^{\mathbf{m}}_{2}\mathbf{\Gamma}_1(\bar{u} = v = w,\ \bar{v} = u) = N(\mathbf{\Gamma})$ *a maximális* **(2. Cs.)**, *M real.* $\circ$ ha $u = v = w$ akkor ${}^{\mathbf{3m}}_{6}\mathbf{\Gamma}(\bar{u} = 2u = 2v = 2w) = N(\mathbf{\Gamma})$ *a maximális* **(1. Cs.)**, *M real.* $\circ$ $m_1 : A_0^{16}A_0^{23}$, $m_2 : A_0^{23}A_0^{45}$, $m_3 : A_0^{45}A_0^{16}$ — m_1^2, m_2^2, m_3^2; $(m_1m_3)^u$, $(m_1m_2)^v$, $(m_2m_3)^w$ $\circ$ ${}^1\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{16}) = \mathbf{um}$, ${}^2\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{23}) = \mathbf{vm}$, ${}^3\mathbf{\Gamma}^0(A_0^{45}) = \mathbf{wm}$ $\circ$ (u,v,w) — $\mathbf{S}^2$: $(2,2,2)$ *nem-maximális* **(1. Cs.)**; $(2,2,w), 2 < w$ *nem-maximális* **(2. Cs.)**; $(2,3,3)$ *nem-maximális* **(2. Cs.)**; $(2,3,4)$; $(2,3,5)$ — $\mathbf{E}^2$: $(3,3,3)$ *nem-maximális* **(1. Cs.) 14. p3m1;** $(2,4,4)$ *nem-maximális* **(2. Cs.) 11. p4mm;** $(2,3,6)$ **17. p6mm** — $\mathbf{H}^2$: $1 > \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$ ■

IRODALOM

[1] A. W. M. Dress, Presentation of discrete groups, acting on simply connected manifolds, *Advances in Math.*, **63** (1987), 196–212.

[2] A. W. M. Dress — D. H. Huson, Heaven and hell tilings; Les pavages d'anges et de diables, *Structural Topology; Revue Topologie Structurale,* **17** (1991), 25–42.

[3] A. W. M. Dress — D. H. Huson — E. Molnár, The classification of face-transitive periodic three-dimensional tilings, *Acta Crystallographica,* **A49** (1993), 806–817.

[4] M. C. Escher, *Grafiek en Tekeningen (Grafikák és rajzok),* Zwolle (1959), Magyar kiadás: Kulturtrade Kft. Budapest (1992).

[5] B. Grünbaum — G. C. Shephard, *Tilings and Patterns,* Freeman Co., New York 1987.

[6] Z. Lucic — E. Molnár, Fundamental domains for planar discontinuous groups and uniform tilings, *Geometriae Dedicata,* **40** (1991), 125–143.

[7] E. Molnár, Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their realizations, *Acta Math. Hungar.*, **59** (1–2) (1992), 175–216.

[8] E. Molnár — I. Prok, Classification of solid transitive simplex tilings in simply connected 3-spaces. Part I. *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai,* **63** *Intuitive Geometry,* Szeged (Hungary), 1991, 311-362, North-Holland (1994).

[9] D. Schattschneider — W. Walker, *M. C. Escher kaleidociklusok,* 1977. Magyar kiadás: Kulturtrade Kft. Budapest (1992).

[10] J. Szirmai, Typen von flächentransitiven Würfelpflasterungen, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.,* **37** (1994), 171–184.

Emil Molnár: Ornaments and tilings by D-symbols (in the sense of M. C. Escher)

This survey paper motivates the topic by analysing well-known pictures of M. C. Escher and other ornaments. The barycentric subdivision of the poligonal tiling is question, and the group of its symmetries leads to the concept of D-symbol (to honour of B. N. Delone (Delaunay), M. S. Delaney and A. W. M. Dress) as a very effective tool for studying tilings in different spaces by computer.

A RIEMANN–ROCH TÉTELRŐL

SZAMUELY TAMÁS

Tartalom

A Riemann–Roch-tétel az algebrai görbék elméletének legfontosabb klasszikus eredménye. Klasszikus — és mégis modern. Talán nincs még egy olyan tétel a matematika történetében, amely alig száz éves története során ennyi metamorfózison ment volna keresztül. A névadó matematikusok még komplex analitikus tételként mondták ki az állítást, majd a századforduló nagy német geometriai iskolájának tagjai (Brill, Noether) észrevették, hogy a tételnek komoly geometriai tartalma van. A következő fontos állomás az volt, amikor F. K. Schmidt, elhagyván a komplex alaptestet, minden karakterisztikára kiterjesztette a tételt. Ez az általánosítás veszteség volt az analízis számára, óriási nyereséget jelentett viszont a számelméletben. André Weilnek is fontos segédeszköze volt egyik leghíresebb tételének, az ún. függvénytestekre vonatkozó Riemann-sejtésnek a bizonyításában. Ma már e Weil-féle eredménynek létezik olyan bizonyítása (Bombieri [2]), amely az algebrai görbék elméletéből kizárólag a Riemann–Roch-tételre támaszkodik, azon kívül pedig csupán Galois-elméleti megfontolásokat használ. Eredetileg szándékunkban állt a Riemann–Roch-tétel e látványos alkalmazását is bemutatni (amely ráadásul éppen a p-karakterisztikájú esetet aknázza ki!), de terjedelmi és időbeli korlátok miatt le kellett róla mondanunk. Az érdeklődő olvasónak Stichtenoth [24] könyvét ajánljuk.

A történetnek ezzel azonban még mindig nincs vége, a tétel ugyanis csak az ötvenes években, a modern algebrai geometria megalapozása után nyerte el ma véglegesnek mondható alakját, s ekkor nyílt meg az út a magasabb dimenziós általánosítások felé is. A jelen dolgozat második felében — elsősorban Jean-Pierre Serre és John Tate munkája nyomán — ezt a legvégső változatot mutatjuk be. Előtte azonban megkíséreljük többé-kevésbé kibontani az algebrai görbék hármas (geometriai, analitikus, számelméleti) aspektusát, és bemutatni, hogy e háromféle látásmód mennyi különböző alkalmazást rejt magában. Ily módon szeretnénk illusztrálni a mai algebrai geometria két fontos jellemvonását: a problémák eredetének és interpretációinak változatosságát, illetve azt, hogy milyen sikeresen használható a modern fegyvertár a klasszikus tételek mélyén rejlő tartalom felderítésére.

Arra törekedtünk, hogy a jelen tanulmány elolvasása az alapvető algebrai ismereteken (itt a Fried [6] tankönyvében felölelt anyagra gondolunk) és az analízis elemein kívül ne igényeljen lényeges előismereteket. Ezért az algebrai geometriában járatlan olvasó számára az első fejezetben példákkal fűszerezve összefoglaltuk a legszükségesebb alapfogalmakat. Ezen túl mindenképp fel kell hívnunk a figyelmet

Kollár János [13] kitűnő áttekintő cikkére, amelyben a magyar olvasó számos további adalékot talál a komplex algebrai görbék klasszikus elméletével kapcsolatban. Egyes konkrét kérdéseket illetően további referenciákkal a fejezetek végén szereplő jegyzetekben szolgálunk.

1. Algebrai görbék

Affin varietások algebrailag zárt test felett. Induljunk ki egy tetszőleges k algebrailag zárt testből. A k elemeiből készített pont-n-esek halmazát, k^n-et n-*dimenziós affin tér*nek nevezzük. Ha I ideál a $k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ polinomgyűrűben, jelölje $V(I)$ k^n azon pontjainak halmazát, amelyek valamennyi I-beli polinomnak zérushelyei. Az ilyen halmazokat *affin zárt halmaz*nak szokás hívni, és amikor I prímideál, affin *varietás*nak. Hilbert bázistétele miatt I végesen generált, és nyilvánvaló, hogy bármely véges $f_1, f_2, \ldots f_k$ generátorrendszer elemeinek zérushelyei már kiadják az egész $V(I)$-t. Ha $I = (f)$ valamely f irreducibilis polinomra, akkor $V(f)$ neve *hiperfelület*. Így Hilbert bázistétele lényegében azt állítja, hogy minden affin zárt részhalmaz előáll véges sok hiperfelület metszeteként. A hiperfelületeket megadó polinomok tekinthetők a zárt halmaz "egyenleteinek". Hilbert egy másik nevezetes tétele, a Nullstellensatz biztosítja, hogy ha I *radikálideál*, azaz megegyezik a radikáljával, akkor $V(I)$-n csak az I-beli polinomok tűnnek el, tehát a V operátor kölcsönösen egyértelmű leképezést létesít affin zárt halmazok és radikálideálok között, amely ráadásul megfordítja a tartalmazás szerinti rendezést. Speciálisan adódik, hogy $V(I)$ pontosan akkor áll egyetlen $(a_1, \ldots, a_n)$ pontból, ha I maximális ideál (más szóval $k[X_1, \ldots, X_n]$ minden maximális ideálja $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ alakú). A $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$ és $V(\sum I_k) = \bigcap V(I_k)$ relációk mutatják, hogy az affin zárt halmazok tekinthetők egy topologikus tér zárt halmazainak. Ezt a topológiát *Zariski-topológiá*nak nevezzük, és az affin zárt halmazokat az altértopológiával látjuk el. Látható, hogy egy zárt halmaz pontosan akkor *irreducibilis* (azaz nem áll elő két másik zárt halmaz uniójaként), ha varietás. Az $O(X) = k[X_1, X_2, \ldots, X_n]/I$ faktorgyűrű az $X = V(I)$ zárt halmaz *koordinátagyűrű*je, amely pontosan akkor lesz nullosztómentes, ha X varietás. A koordinátagyűrű $K(X)$ hányadostestének neve *függvénytest*, amelynek a transzcendenciafokát az X *dimenzió*jának nevezzük. Az egydimenziós affin varietások az *(irreducibilis) affin görbék*.

1.1. Lemma. *Az affin görbéknek önmagukon kívül csak a véges halmazok a zárt részhalmazai.*

Bizonyítás. Az állítás szemléletesen világos, hiszen ha egy görbe nincs rajta valamely hiperfelületen, akkor csak véges sok pontban metszi. Bizonyításképpen először vegyük észre, hogy a koordinátagyűrű Noethersége miatt a zárt halmazokra teljesül a minimumfeltétel, így mindegyikük előáll véges sok irreducibilis egyesítéseként. Elég tehát belátni, hogy a valódi zárt részhalmazok közül csak az egyeleműek irreducibilisek, azaz $O(X)$ minden prímideálja maximális. Tegyük fel indirekte, hogy

P nem maximális prímideál $O(X)$-ben, ekkor (mivel k algebrailag zárt) $O(X)/P$ hányadostestének transzcendenciafoka is 1. Ha x olyan O(X)-beli elem, amely a faktorban transzcendens elemre képződik, és $y \in P \setminus \{0\}$, akkor az (x, y) pár gyöke egy $P(X, Y) \in k[X, Y]$ irreducibilis polinomnak, amelyről a nullosztómentesség miatt feltehető, hogy nem osztható Y-nal. De akkor a faktorban teljesül a nemtriviális $P(\bar{x}, 0) = 0$ egyenlőség, ami ellentmondás.

Lokális gyűrűk. Legyen most $P = (a_1, a_2 \ldots, a_n) \in k^n$ tetszőleges pont, $M_P = (X_1 - a_1, X_2 - a_2, \ldots, X_n - a_n)$ a hozzá tartozó maximális ideál. Ha $P \in X$ valamely $X = V(I)$ affin varietásra, akkor $I \subseteq M_P$, és M_P egy $\bar{M}_P$ maximális ideálra képződik az $O(X)$ koordinátagyűrűben. Így elkészíthető $O(X)$-nek az $\bar{M}_P$-nél vett *lokalizált*ja, amely nem más, mint $O(X)$-nek az $O(X) \setminus \bar{M}_P$ multiplikatívan zárt részhalmaz szerinti hányadosgyűrűje. A kapott lokális gyűrűt $O_{X,P}$-vel jelöljük, és X-nek a P *pontbeli lokális gyűrű*jének mondjuk. $O_{X,P}$ tehát olyan f/g alakú racionális függvényekből áll, amelyekre $g(P) \neq 0$, és az f/g, f'/g' hányadosokat ekvivalensnek tekintjük, ha $fg' - f'g \in I$. A maximális ideálban olyan függvények ekvivalenciaosztályai vannak, amelyek P-ben eltűnnek, továbbá könnyű meggondolás mutatja, hogy a szerinte vett faktorgyűrű a k alaptesttel izomorf. Így $f \in O_{X,P}$ esetén az $f(P)$ függvényérték értelmezhető mint azon k-beli elem, amelyre f a faktorban képződik. A $k[X_1, \ldots, X_n]$ polinomgyűrű X_1, X_2 stb. határozatlanai által a varietáson indukált racionális függvényeket *koordinátafüggvények*nek mondjuk, és ha nem okoz félreértést, ugyanígy fogjuk jelölni.

Végezetül megjegyezzük, hogy a gyenge Nullstellensatzból nem nehéz levezetni azt a tételt, amely szerint egy affin varietás lokális gyűrűinek metszete éppen a koordinátagyűrű (vagyis ha egy függvénynek „sehol sincs nevezője", akkor polinom.)

Projektív varietások. Tekintsük $k^{n+1} \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ két $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ és $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ elemét ekvivalensnek, ha $(a_0, a_1, \ldots a_n) = (\lambda b_0, \lambda b_1, \ldots, \lambda b_n)$ valamely $\lambda \in k \setminus \{0\}$ mellett. Az így kapott ekvivalenciaosztályok halmaza a $\mathbf{P}^n(k)$ *n-dimenziós projektív tér*. $\mathbf{P}^n(k)$ egy X részhalmaza *projektív zárt halmaz*, ha $X = V(I)$ valamely I *homogén* polinomideálra (azaz ha egy $f \in k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ polinom I-beli, akkor f homogén komponensei is I-ben vannak). Hála a Nullstellensatz homogén ideálokra megfogalmazható analogonjának, az affin esethez hasonlóan definiálható a projektív Zariski-topológia, a (homogén) koordinátagyűrű és a projektív hiperfelületek. A homogén lineáris polinomok által megadott hiperfelületeket *hipersík*oknak mondjuk. Könnyen látható, hogy $0 \leqq i \leqq n$ esetén az

$$(x_0, x_1, \ldots x_n) \mapsto \big((x_0/x_i), \ldots, (x_{i-1}/x_i), (x_{i+1}/x_i), \ldots, (x_n/x_i)\big)$$

leképezés folytonos bijekció, sőt homeomorfizmus $\mathbf{P}^n(k) \setminus V(X_i)$ és k^n mint topologikus terek között. (Az egyik irányú folytonossághoz elég látni, hogy egy $V(f)$ projektív hiperfelület esetén pl. $V(f) \setminus \big(V(f) \cap V(X_0)\big)$ képe affin zárt halmaz, ami teljesül, hiszen éppen az $f(1, X_1, X_2, \ldots, X_n)$ „dehomogenizált" polinom nullhelyeiből áll. A másik irány hasonló, csak itt egy d-edfokú g polinom $X_0^d g(X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0)$

„homogenizáltját" kell venni.) Így tekinthetjük a projektív teret mint egy „végtelenbeli" hipersíkkal kibővített affin teret, ráadásul a $\mathbf{PGL}(n+1,k)$ csoport valamely elemét alkalmazva adódik, hogy $\mathbf{P}^n(k)$-ból *bármelyik* hipersíkot elhagyva k^n-nel homeomorf teret kapunk. Ugyanakkor az iménti meggondolásból az is adódik, hogy tetszőleges X projektív varietásnak létezik nyílt affin részhalmazokból álló fedése, aminek sokszor vesszük hasznát, ha valamely kérdés vizsgálatát az affin esetre akarjuk redukálni. Így például az 1.1 Lemma állítása *érvényben marad projektív görbékre is.* Másfelől most már lehetőség nyílik a függvénytest és a lokális gyűrűk kényelmes definiálására. (A fő gond itt az, hogy két homogén polinom hányadosa csak akkor értelmezhető mint függvény $\mathbf{P}^n(k)$ egy pontjában, ha a polinomok azonos fokúak, ami algebrailag nehezen kezelhető feltétel.) Bármely $P \in X$ ponthoz található olyan $X^{(i)} = X \setminus \big(X \cap V(X_i)\big)$ affin varietás, amelyre $P \in X^{(i)}$, ennek $O_{X^{(i)},P}$ lokális gyűrűjét tekintjük az *X projektív varietás P-beli lokális gyűrűjének*, függvénytestét (ami nem más, mint $O_{X^{(i)},P}$ hányadosteste), az X $K(X)$ *függvénytesté*nek, és dimenzióját az X *dimenziójá*nak. Könnyű meggondolással adódik, hogy ezek a fogalmak függetlenek a $V(X_i)$ hipersík választásától, amint azt az alábbi példa mutatja.

Példa. Tekintsük az $X = V(X_0X_1 - X_2^2) \subset \mathbf{P}^2(k)$ projektív síkgörbét. Ebben az esetben $X^{(1)}$ az $X_0 - X_2^2 = 0$ affin *parabola*, $X^{(2)}$ az $X_0X_1 - 1 = 0$ affin *hiperbola*. A $P = (1,1,1)$ pontban vett lokális gyűrű tehát lehet mindkét affin görbének a $(1,1)$ pontbeli lokális gyűrűje. Az első gyűrű $k(X_0, X_2)$ azon elemeiből áll, amelyeknek a nevezője nem tűnik el $(1,1)$-ben, és f/g-t, f'/g'-t azonosítjuk, ha $f'g - fg'$ osztható $(X_0 - X_2^2)$-vel. A második hasonló, csak $k(X_0, X_1)$-et és az $(X_0X_1 - 1)$-gyel való oszthatóságot nézzük. A kívánt gyűrűizomorfizmust úgy kapjuk meg, hogy a számlálókat és a nevezőket is $f(X_0, X_2) \mapsto X_1^d f(X_0/X_1, X_2/X_1) \mapsto X_1^d f(X_0/X_1, 1/X_1)$ útján homogenizáljuk, majd dehomogenizáljuk, ugyanis ekkor a két definiáló polinom éppen egymásba megy át. $O_{X^{(2)},(1,1)}$-nek egy elemét reprezentálja például az $(X_0^2 + X_0 + 1)/X_1$ racionális függvény, amelynek értéke $(0,1)$-ben 3. De $X_0^2/X_2 + X_0 + X_2 \in O_{X^{(1)},(1,1)}$ ugyanannak az $O_{X,P}$-beli elemnek felel meg, hiszen mindketten az $(X_0^2 + X_0X_2 + X_2^2)/X_1X_2$ P-ben szintén 3 értéket felvevő függvény dehomogenizáltjai. Izomorf gyűrűk hányadostestei is izomorfak, de itt most közvetlenül is világos, hogy mindkét függvénytest a $k(x)$ egyszerű transzcendens bővítéssel izomorf, hiszen az egyik esetben $k[X_2, X_2^2]$, a a másikban $k[X_0, 1/X_0]$ hányadostestéről van szó.

Ily módon tehát tekinthetjük a lokális gyűrűk és a függvénytest elemeit homogén polinomok hányadosainak is, csak vigyázni kell, hogy a számlálót és a nevezőt úgy homogenizáljuk, hogy azonos fokúak legyenek. Azt mondjuk, hogy $f \in K(X)$ *reguláris a $P \in X$ pont egy környezetében*, ha $f \in O_{X,P}$. Látható, hogy minden racionális függvény egy nyílt halmazon (a nevező nullahalmazának komplementerén) reguláris, amely ráadásul X irreducibilitása miatt sűrű X-ben. Görbéken tehát egy racionális függvény véges sok pont kivételével mindenütt reguláris.

Racionális leképezések. Legyenek X_1 és X_2 tetszőleges projektív varietások. Egy $\phi = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ $K(X_1)$-beli elemekből álló függvény-$(n+1)$-est X_1-ből X_2-be menő *racionális leképezésnek* nevezünk, ha azon $P \in X_1$ pontokra, amelyeknek egy környezetében mindegyik függvény reguláris és valamelyik nem tűnik el, $\phi(P) = \big(f_0(P), f_1(P), \ldots, f_n(P)\big) \in X_2$. ϕ tehát regulárisnak tekinthető egy sűrű nyílt halmazon (az f_i-k és pl. $1/f_0$ regularitási tartományainak metszetén), de a homogenitás felhasználásával további pontok környezeteibe is folytatható regulárisan. Pontosabban, ϕ-t regulárisnak mondjuk a P pont egy környezetében, ha valamely $g \in K(X_1)$ mellett a gf_i függvények regulárisak P egy környezetében és valamelyikük nem tűnik el P-ben. Ebből már következik, hogy $\big(gf_0(P), gf_1(P), \ldots, gf_n(P)\big) \in X_2$. Ha ugyanis F az X_2 egy definiáló polinomja, $F \circ \phi$ racionális függvény X_1-en, tehát nullhelyei zárt halmazt alkotnak, ám egy sűrű nyílt halmazon már tudjuk, hogy eltűnik, tehát csak azonosan 0 lehet, s a homogenitás miatt ugyanez igaz $F \circ g\phi$-re is. Ugyanebből a meggondolásból adódik, hogy minden racionális leképezés a Zariski-topológiában folytonos a regularitási tartományán. Észrevételünk módot ad továbbá arra is, hogy ϕ definíciójában az f_i-ket racionális függvények helyett azonos fokú homogén polinomoknak is választhassuk („beszorzunk a nevezőkkel"). Amennyiben ϕ az egész X_1-en reguláris, akkor *morfizmusnak* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a fenti fogalmak (a homogenitáson alapuló definíciókat leszámítva) affin varietásokra teljesen analóg módon definiálhatók, és a függvénytest elemeihez hasonlóan projektív racionális leképezések is „összerakhatók affin darabokból".

Projektív morfizmusokkal kapcsolatban az alapvető tétel a következő.

1.2. Tétel. *Legyen X projektív varietás, $\phi : X \to \mathbf{P}^n(k)$ morfizmus. Ekkor $\phi(X)$ is projektív varietás.*

A bizonyításhoz — bármennyire egyszerűen hangzik is a tétel — olyan fogalmakra és technikákra lenne szükségünk, amelyeket a későbbiekben nem fogunk használni, ezért mellőzzük. Bővebbet a fejezet végén szereplő Jegyzetekben. Az 1.1 Lemma figyelembevételével adódik az alábbi

Következmény. Irreducibilis projektív görbék között minden nemkonstans morfizmus szürjektív.

A ϕ: $X_1 \to X_2$ racionális leképezés indukál a függvénytesteken egy ϕ^*: $K(X_2) \to K(X_1)$ természetes homomorfizmust, amely a $\phi^*(f) = f \circ \phi$ képlettel van értelmezve. A projektív racionális leképezések folytatásánál látott gondolatmenethez hasonlóan látható, hogy ha $\phi(X_1)$ sűrű X_2-ben, akkor az indukált ϕ^* leképezés beágyazás. Egy ilyen ϕ *biracionális leképezés*, ha létezik $\psi : X_2 \to X_1$ racionális leképezés, amelynek a képe sűrű X_1-ben, és a $\phi \circ \psi$ és $\psi \circ \phi$ leképezések a regularitási tartományukon identikusak. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy X_1 és X_2 *biracionálisan izomorfak*. Ha még ráadásul ϕ és ψ is morfizmusok, akkor ϕ *izomorfizmus*. Nem nehéz bizonyítani, hogy X_1 és X_2 pontosan akkor biracionálisan izomorfak, ha $K(X_1) \cong K(X_2)$, és ha mindkettő affin, úgy pontosan akkor izomorfak, ha

$K[X_1] \cong K[X_2]$ (felhasználva, hogy az affin esetben ϕ^* a koordinátagyűrűket is egymásba viszi).

Példa. Az előző példában szereplő X projektív síkgörbe biracionálisan izomorf a $\mathbf{P}^1(k)$ projektív egyenessel, hiszen mindkettő függvényteste egyszerű transzcendens bővítés. De nem nehéz explicite sem megadni egy ϕ: $\mathbf{P}^1(k) \to X$ biracionális leképezést: ha T_1, T_2 jelölik a koordinátafüggvényeket $\mathbf{P}^1(k)$-n, $\phi = (T_1^2, T_2^2, T_1T_2)$ ilyen lesz. ϕ ugyanis X-be képez, és például a $\psi = (X_0, X_2)$ leképezés inverze, mert $(t_1, t_2) \in \mathbf{P}^1(k)$-ra $\psi \circ \phi(t_1, t_2) = (t_1^2, t_1t_2) = (t_1, t_2)$, valamint $(x_0, x_1, x_2) \in X$-re $\phi \circ \psi(x_0, x_1, x_2) = (x_0^2, x_2^2, x_0x_2) = (x_0^2, x_0x_1, x_0x_2) = (x_0, x_1, x_2)$. Azonnal látható, hogy ψ reguláris az egész X-en, leszámítva a $(0, 1, 0)$ pontot (ahol X_0 és X_2 eltűnnek). De X-en $(X_1/X_2)\psi = (X_0X_1/X_2, X_1) = (X_2, X_1)$, vagyis ψ ebbe a pontba is folytatható regulárisan. Másrészt ϕ is nyilvánvalóan morfizmus, tehát X nemcsak biracionálisan izomorf, hanem izomorf is $\mathbf{P}^1(k)$-val. Hamarosan kiderül, hogy ez korántsem véletlen. Ugyanakkor az $X^{(1)}$ és $X^{(2)}$ affin görbék példát szolgáltatnak biracionálisan izomorf, de nem izomorf görbékre.

1.3. Lemma. *Bármely görbe biracionálisan izomorf egy síkgörbével.*

Bizonyítás. A görbék függvényteste $k(x, y)$ alakú, ahol x traszcendens k felett és y algebrai $k(x)$ felett. Ha $f(x, Y)$ olyan $k[x]$-beli együtthatós irreducibilis polinom, amelynek y gyöke, akkor $k[x, y] \cong k[X, Y]/(f(X, Y))$, vagyis f k^2-beli nullahalmaza épp jó lesz. A polinomot homogenizálva persze projektív görbét is készíthetünk.

(A fenti bizonyításban $p > 0$ karakterisztika esetén van némi csalás, hiszen feltételeztük, hogy van olyan x racionális függvény, amelyre a függvénytest szeparábilis $k(x)$ felett. Ennél sokkal általánosabb tétel is igaz (l. pl. van der Waerden [26], ám nekünk ez az észrevétel voltaképpen csak nemszinguláris görbékre fog kelleni, és azokra az 1.4 Lemmában be is bizonyítjuk.)

A továbbiakban kizárólag (irreducibilis) görbékkel foglalkozunk.

Nemszinguláris görbék. Ha már az imént egy $f \in O_{X,P}$ elemet úgy tekintettünk, mint P-ben reguláris racionális függvényt, természetesen adódik a kérdés, hogy nem lehet-e f-et P-ben valamilyen értelemben hatványsorba fejteni. Általában ez nem tehető meg, de amikor $O_{X,P}$ maximális ideálja, M_P főideál, kínálkozik egy rokonszenves definíció. Nevezetesen, ha t jelöli az M_P generátorelemét, az (affin) lokális gyűrűkről mondottak szerint $f - f(P) = f_1 t$ valamely $f_1 \in O_{X,P}$-re, amelyre azonban az eljárás megismételhető, vagyis $f_1 - f_1(P) = f_2 t$, és így tovább. Ily módon valóban kapunk egy $f = f(P) + f_1(P)t + f_2(P)t^2 + \ldots$ formális hatványsorelőállítást, sőt, valamennyi f-et sorba fejtve $O_{X,P}$ egy ι homomorfizmusát a $k[[t]]$ formális hatványsorgyűrűbe. Ez a homomorfizmus ráadásul beágyazás, ugyanis definíció szerint $\ker \iota = \bigcap(t^n)$, ami $O_{X,P}$ Noethersége miatt csak a 0-ból áll, hiszen ha létezne nemtriviális $a_1 = ta_2, a_2 = ta_3, \ldots$ végtelen sorozat, akkor $(a_1) \subset (a_2) \subset$

$(a_3) \subset \ldots$ ideálok végtelen növő lánca lenne. (A lánc valóban szigorúan növő, ui. a nullosztómentesség miatt $(a_n) = (ta_{n+1}) = (a_{n+1})$ csak úgy állhat fenn, ha t egység, ami nem lehet.)

Az előbbi gondolatmenetből, és abból, hogy $O_{X,P} \setminus M_P$ éppen az egységekből áll, az is következik, hogy $O_{X,P}$-nek esetünkben minden nemtriviális I ideálja $I = (t^n)$ alakú, ahol n az a legkisebb természetes szám, amelyre $t^n \in I$. Speciálisan minden $f \in O_{X,P}$ egyértelműen előáll $f = ut^n$ alakban, ahol u egység és n természetes szám, de akkor a $K(X)$ hányadostest elemei is előállnak így, csak most már n negatív egész is lehet. Azt a v_P: $K(X) \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ függvényt, amely $K(X) \setminus \{0\}$ minden f eleméhez a hozzá tartozó fenti n-et rendeli hozzá, továbbá $v_P(0) = \infty$, a P-hez tartozó *diszkrét értékelés*nek nevezzük. Az $f \in K(X)$ függvénynek P-ben *n-szeres gyöke van*, ha $v_P(f) = n > 0$, és *n-edrendű pólusa*, ha $v_P(f) = n < 0$. Az utóbbi esetben f-et (a fentihez hasonló értelemben) Laurent-sorba fejthetjük P körül, hiszen $t^n f$ már reguláris függvény lesz P-ben.

A fenti tulajdonságú pontokat *nemszinguláris pontok*nak szokás nevezni, lokális gyűrűiket (sőt általában azokat a lokális főideálgyűrűket, amelyek nem testek) *diszkrét értékelésgyűrű*nek. Ha R diszkrét értékelésgyűrű, beszélhetünk általában a hozzá tartozó v_R diszkrét értékelésről, hiszen annak definíciójában semmilyen geometriai fogalmat nem használtunk fel. Azonnal látható, hogy az R diszkrét értékelésgyűrű K hányadostestének egy x eleme pontosan akkor R-beli, ha $v_R(x) \geqq 0$, és akkor egység, ha $v_R(x) = 0$, továbbá $v_R(xy) = v_R(x) + v_R(y)$ és $v_R(x + y) \geqq \min\big(v_R(x), v_R(y)\big)$. A t generátorelem neve *lokális paraméter*. (Természetesen t minden egységszerese is lokális paraméter, és több nincs is.) A nemszinguláris görbék azok, amelyeknek minden pontja nemszinguláris.

Példák. (1) Megmutatjuk, hogy kedvenc görbénk, az $X = V(X_0X_1 - X_2^2)$ projektív síkgörbe nemszinguláris. A bizonyításhoz elég az affin fedés, $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ és $X^{(2)}$ lokális gyűrűiről kimutatni, hogy főideálgyűrűk. Mitöbb, elegendő ezt a koordinátagyűrűkről látni, mivel főideálgyűrűk hányadosgyűrűi is nyilvánvalóan főideálgyűrűk. A parabolák koordinátagyűrűi jók lesznek, hiszen a $k[X]$ polinomgyűrűvel izomorfak, de $X^{(2)}$ koordinátagyűrűje, $k[X, 1/X]$ is főideálgyűrű lesz, mint $k[X]$-nek az $\{1, X, X^2, \ldots\}$ multiplikatívan zárt halmaz szerinti hányadosgyűrűje. Érdekességképpen megjegyezzük, hogy az $O(X)$ homogén koordinátagyűrű nemhogy nem főideálgyűrű, de még az egyértelmű faktorizáció sem érvényes benne.

(2) Nem nehéz ellenőrizni, hogy az $X^2 = Y^3$ affin síkgörbe $(0,0)$ pontja szinguláris pont, hiszen a $k[X^2, X^3]_{(X^2,X^3)}$ lokális gyűrű maximális ideálja nem főideál. Ugyanakkor ennek a síkgörbének az origó inflexiós pontja, ami megint csak nem véletlen.

Ha X_1 nemszinguláris irreducibilis projektív görbe és X_2 projektív varietás, minden ϕ: $X_1 \to X_2$ racionális leképezés morfizmus. Legyen ugyanis $P \in X_1$ tetszőleges pont, $\phi = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ és $n = \min v_P(f_i)$. Ekkor $t^{-n} f_i$ minden i-re reguláris P-ben, továbbá valamelyik i-re nem 0, tehát ϕ valóban reguláris

P-ben. Következményként adódik, hogy ha két nemszinguláris (projektív) görbe biracionálisan izomorf, akkor izomorf is. (Ezt illusztrálták a látott példák.)

Ugyancsak fontos észrevétel, hogy ha X_1 nemszinguláris, X_2 pedig tetszőleges projektív görbe, akkor bármely ϕ: $X_1 \to X_2$ nemkonstans racionális leképezés $K(X_2)$ *beágyazását* indukálja $K(X_1)$-be. (Ehhez a fentiek miatt elég megmutatni, hogy $\phi(X_1)$ sűrű X_2-ben. Ellenkező eset az 1.1 Lemma értelmében csak úgy állhatna fenn, ha $\phi(X_1)$ véges, tehát speciálisan zárt is. Mivel azonban X_1 irreducibilis, ϕ pedig, mint láttuk, mindenütt definiált folytonos leképezés, $\phi(X_1)$-nak is irreducibilis zárt halmaznak kell lennie, ami - ismét csak az 1.1 Lemma miatt - csak úgy lehetne, ha ϕ konstans volna.) Ráadásul $K(X_1)$ *véges* bővítése $K(X_2)$-nek, mivel mindketten egy egyszerű transzcendens bővítés véges bővítései.

Az 5. fejezetben be fogjuk bizonyítani, hogy minden projektív görbe biracionálisan izomorf egy nemszinguláris görbével. Ezt úgy szokás mondani, hogy a görbe szingularitásai *feloldhatók*. A nemszingularitás fogalma tehát biracionális izomorfiára nézve nem invariáns, ugyanakkor az eddigiekből következik, hogy izomorfiára nézve igen.

Morfizmusok a projektív egyenesre. Ha f racionális függvény az X projektív görbén, az $(f,1) \in K(X)^2$ rendezett pár (ahol 1 az azonosan 1 függvényt jelöli) X-nek egy racionális leképezését definiálja $\mathbf{P}^1(k)$-ba, amely f pólushelyeit éppen az $(1,0)$ „végtelenbeli" pontba viszi, az esetleges „lényeges szingularitásokban" pedig nem reguláris. Ám valójában X minden $\mathbf{P}^1(k)$-ba menő racionális leképezése előáll ilyen alakban, egy kivétellel. A kivétel az „azonosan végtelen" leképezés, egy általános $(f_1, f_2) \in K(X)^2$ függvénypárnak pedig az f_1/f_2 (megfelelően homogenizált) függvényhez tartozó fenti leképezés felel meg. Ezt az észrevételt az 1.2 Tétellel párosítva kapjuk, hogy *ha egy racionális függvény mindenütt reguláris X-en, akkor konstans.* (Mindezek persze tetszőleges projektív varietásra igazak.)

Mostantól, ha másként nem jelezzük, görbén mindig nemszinguláris projektív görbét értünk. Ilyenkor az f függvény által meghatározott racionális leképezés morfizmus, és ha f nem konstans, a függvénytesteken indukál egy $k(f) \to K(X)$ beágyazást. Vizsgáljuk meg ezt a testbővítést kissé részletesebben olyankor, amikor f lokális paraméter a görbe egyik pontjában.

Példa. Először is megnézzük egy konkrét esetben, mi egy lokális paraméter által megadott morfizmus geometriai tartalma. Nagy meglepetésre példaként az $X = V(X_0X_1 - X_2^2) \subset \mathbf{P}^2(k)$ síkgörbét tekintjük, amelyről már tudjuk, hogy nemszinguláris. Az $(1,0,0)$ pontban a $t = X_2/X_0$ függvény lokális paraméter (hiszen generálja az ottani lokális gyűrű maximális ideálját, amint az $X^{(0)}$-án rögtön látszik). A hozzá tartozó morfizmust a $\phi_t = (X_0, X_2)$ pár adja meg, amelyről láttuk, hogy izomorfizmust indukál $\mathbf{P}^1(k)$-val. De mi lesz az $s = X_1/X_0$ függvényhez tartozó morfizmus? Ha $\mathbf{P}^1(k)$-t azonosítjuk az $X_2 = 0$ egyenessel, a keresett leképezést a $\phi_s = (X_0, X_1, 0)$ hármas definiálja, amely nem más, mint a $P = (0,0,1)$ pontból $X_2 = 0$-ra (tehát $\mathbf{P}^1(k)$-ra) való vetítés. Ennek ellenőrzéseképpen először vegyük észre, hogy a $(0,1,0)$ pont mindkét leképezésnél helyben marad, így elegendő az $Y^{(0)}$ affin parabolát vizsgálni, amelynek egyenlete az $s = X_1/X_0$, $t = X_2/X_0$ affin koordinátákban $s = t^2$. Itt pedig a ϕ_s leképezés a parabola minden pontjához az s koordinátáját rendeli, ami valóban a mondott vetítés, mivel a P pont éppen a „t tengely végtelen távoli pontja".

Másfelől ezen az affin térképen ϕ_t éppen a t tengelyre való merőleges vetítés lesz, ami tényleg bijekció, míg ϕ_s, amely a vezéregyenesre vetít, kétszeresen fedi le $\mathbf{P}^1(k)$-t. Ez abból adódik, hogy az s racionális függvénynek kétszeres gyöke van $(1,0,0)$-ban, hiszen $s = t^2$. Mindez azt sugallja, hogy a lokális paraméterhez tartozó morfizmus a „leggazdaságosabb vetítés".

1.4. Lemma. *Legyen t lokális paraméter az X görbe valamely P pontjában. Ekkor $K(X)$ szeparábilis bővítése $k(t)$-nek.*

Ha az alaptest karakterisztikája 0, az állítás persze nemcsak lokális paraméterekre, hanem minden racionális függvényre igaz. Amikor azonban a karakterisztika $p > 0$, ellenpéldát szolgáltatnak egy lokális paraméter p-vel osztható kitevőjű hatványai. (Egyébként minden más ellenpélda is ilyenekre vezethető vissza.)

Bizonyítás. Legyen $\operatorname{char} k = p > 0$, $y \in k(X)$ tetszőleges elem, és vegyünk egy minimális fokú $k[t]$-beli együtthatós $F(Y)$ polinomot, amelynek y gyöke. Elegendő megmutatnunk, hogy F-ben Y valamely hatványának kitevője nem osztható p-vel. Tegyük fel, hogy ez nincs így, vagyis F Y^p-nek is polinomja. Tekintsük F-et mint $k[t,Y]$-beli polinomot, és rendezzük t mod p hatványai szerint:

$$F(Y) = \sum_{i=0}^{p-1} \phi_i(t^p, Y^p)t^i = \sum_{i=0}^{p-1} \psi_i(t,Y)^p t^i$$

ahol ϕ_i, ψ_i $k[T,Y]$-beli polinomok, és a ψ_i-k minden együtthatója a megfelelő ϕ_i-beli együttható egy p-adik gyöke. (k algebrailag zárt, így vonhatunk benne p-adik gyököt!) Ha most behelyettesítjük y-t F-be, a baloldalon 0 áll, a jobboldalon viszont $v_P\big(\psi_i(t,y)^p t^i\big) \equiv i$ mod p minden i-re, vagyis minden tag v_P-értéke különböző. Ebből i szerinti indukcióval könnyen adódik, hogy csak úgy kaphatunk 0-t, ha $\psi_i(t,y)=0$ minden i-re. És már itt is az ellentmondás, mert mindegyik ϕ_i kisebb fokú Y-ban, mint F, és valamelyik i-re ez a fokszám legalább 1.

1.5. Állítás. *Legyen t a fenti lokális paraméter, $N = \big|K(X) : k(t)\big|$. Ekkor véges soktól eltekintve $\mathbf{P}^1(k)$ minden pontjának N ősképe van.*

A kivételes pontokat *elágazási pontok*nak nevezzük.

Bizonyítás. Legyen y olyan racionális függvény, amelyre $K(X) = k(t,y)$, és F az y egy $k[t]$ feletti minimálpolinomja úgy, mint az előző bizonyításban. Minthogy az $F(t,Y) = 0$ síkgörbe biracionálisan izomorf Y-nal, véges sok pont eldobása után elég belátni, hogy véges sok kivétellel minden $c \in k$ elemre $F(c,Y)$ gyökei egyszeresek. Erre a síkgörbére ugyanis a leképezés az előző példában tárgyalthoz hasonló vetítés lesz, tehát már valóban csak adott első koordinátájú pontokat kell keresni. Az 1.4 Lemma mutatja, hogy az F' (Y szerinti) derivált polinom nem azonosan 0, ezért F és F' mint a $k(t)[Y]$ főideálgyűrű elemei relatív prímek, és így léteznek $k(t)$-beli együtthatós P_1, P_2 polinomok, amelyekre $P_1F+P_2F' = 1$. Ebből az egyenletből viszont következik, hogy az $F(c,Y)$, $F'(c,Y) \in k[Y]$ polinomoknak csak akkor lehet közös gyöke, ha c gyöke a P_1, P_2 együtthatóinak nevezőiben szereplő $k[t]$-beli polinomok valamelyikének, ami valóban véges sok c értéket jelent.

Könnyű megfontolás mutatja, hogy a t által megadott morfizmus valójában a fenti biracionális leképezésen keresztül faktorizálódik, így a bizonyításból az is kiolvasható, hogy az elágazási pontoknak csak N-nél kevesebb őséépe lehet.

Befejezésképpen még rámutatunk az 1.4 Lemma megfordíthatóságára.

1.6. Lemma. *Legyen K a $k(t)$ egyszerű transzcendens bővítés véges szeparábilis bővítése. Ekkor létezik olyan X görbe, amelynek a függvényteste K, és t lokális paraméter X egy nemszinguláris pontjában.*

Bizonyítás. Legyen x olyan függvény, amelyre $K = k(t,x)$, és legyen $F(t,X)$ az x $k[t]$-beli együtthatós minimálpolinomja $k(t)$ felett. K tehát izomorf az $F(t,X)=0$ egyenletű affin síkgörbe függvénytestével. Legyen c az $F(0,X) \in k[X]$ polinom valamelyik gyöke. Állítjuk, hogy a görbe $(0,c)$ pontja nemszinguláris pont, és t lokális paraméter az ottani R lokális gyűrűben. Elég megmutatnunk, hogy ha R egy elemét olyan $P \in k[t,X]$ polinom reprezentálja, amelyre $P(0,c)=0$, akkor P osztható R-ben t-vel, hiszen ebből már következik az álítás minden P számlálójú racionális függvényre. Tekintsük azokat a $P_1, F_1 \in k[X]$ polinomokat, amelyekre $P(0,X) = (X-c)P_1$ és $F(0,X) = (X-c)F_1$. Ekkor $F_1P(0,X) = P_1F(0,X)$, következésképpen $F_1P - P_1F$-nek mint $k[X]$-beli együtthatós, t határozatlanú polinomnak a 0-ban gyöke van, és így valamilyen $Q \in k[t,X]$ polinomra $F_1P - P_1F = tQ$. Minthogy a bővítés szeparábilis volt, $F_1(c) \neq 0$, ami éppen azt jelenti, hogy P képe az R lokális gyűrűben megegyezik a t generálta ideál egy elemével.

Jegyzetek. A nemszinguláris görbékre mutatott példa atipikus, ugyanis az affin fedés koordinátagyűrűi általában nem főideálgyűrűk. Igaz viszont, hogy mindig Dedekind-gyűrűk.

Az 1.2 Tétel történetileg is egyik első példája volt annak, hogyan lehet egy geometriai tételt tisztán algebrai problémára redukálni. Vegyük például a legegyszerűbb esetet. Az a tény, hogy projektív varietáson nincs nemkonstans mindenütt reguláris függvény, ekvivalens azzal, hogy a függvény homogén polinomok hányadosaként történő reprezentálásakor a nevezőnek valahol el kell tűnnie a varietáson. Felírva a varietást definiáló egyenleteket, némi fejtörés után arra a tételre jutunk, hogy legfeljebb n darab $(n+1)$-változós homogén polinomnak mindig van közös zérushelye. Az általános eset is hasonló jellegű, csak valamivel bonyolultabb. Ilyen kérdésekkel foglalkozott az ún. eliminációelmélet. A klasszikus bizonyítás rezultánsokkal dolgozik (lásd van der Waerden [26], a régebbi kiadások részletesebbek), de lineáris algebrai eszközökkel hamarabb célba lehet érni (pl. Safarevics [22]). Modern, kommutatív algebrán alapuló bizonyításokat tartalmaz pl. Lang [14] vagy Mumford [18] könyve. Az eliminációelmélet előnye, hogy explicit formulákat ad, az újabb bizonyításokból viszont kiderül, hogy a tétel sokkal általánosabb keretek között is igaz. Erre az 5. Fejezet végén még visszatérünk.

2. Riemann-felületek

Az előző fejezetben láttuk, hogy a nemszinguláris görbék lokális gyűrűinek elemei hasonlóan viselkednek, mint a reguláris függvények egy komplex síkbeli tartomány, vagy általánosabban, egy komplex sokaság valamely pontjában. Ez motiválja a most következő elnevezést.

Absztrakt Riemann-felületek. Az X görbe *absztrakt Riemann-felülete* vagy *modellje* azon $k \subset R$ diszkrét értékelésgyűrűkből áll, amelyeknek hányadosteste $K(X)$. A Riemann-felület Zariski-topológiájának pedig azt a topológiát érdemes tekinteni, amelyben a zárt részhalmazok csak az egész tér és a véges halmazok. Így ugyanis igaz lesz a következő

2.1. Állítás. *Bármely nemszinguláris projektív görbe a Zariski-topológiában homeomorf a Riemann-felületével.*

Bizonyítás. Feleltessük meg minden pontnak a lokális gyűrűjét. Ahhoz, hogy ez a leképezés homeomorfizmus, az 1.1 Lemma figyelembevételével csak azt kell megmutatnunk, hogy bijekció. Az injektivitás következik abból, hogy az X görbe bármely két P_1, P_2 pontjához található olyan racionális függvény, amely pl. P_1-ben eltűnik, de P_2-ben nem. A szürjektivitáshoz először azt látjuk be, hogy ha a $k \subset R$ diszkrét értékelésgyűrű hányadosteste $K(X)$, akkor $R \supseteqq O_{X,P}$ valamely $P \in X$ pontra. Jelöljék ehhez az X-en vett koordinátafüggvényeket kivételesen $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n$, és legyen $0 \leqq i,j \leqq n$ azon indexpár, amelyre $v_R(\bar{X}_i/\bar{X}_j)$ maximális. $j = 0$ feltehető, továbbá feltehető az is, hogy X nem fekszik egyetlen $V(X_l)$ hipersíkon sem (különben kisebb projektív térbe ágyazzuk be), és így a fenti maximum véges. Ekkor az $X^{(0)}$ affin görbére $O(X^{(0)}) = k[\bar{X}_1/\bar{X}_0, \bar{X}_2/\bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_n/\bar{X}_0] \subset R$, hiszen a maximalitás miatt $1 \leqq l \leqq n$ esetén

$$v_R(\bar{X}_l/\bar{X}_0) = v_R(\bar{X}_l/\bar{X}_i)(\bar{X}_i/\bar{X}_0) = v_R(\bar{X}_i/\bar{X}_0) - v_R(\bar{X}_i/\bar{X}_l) \geqq 0.$$

Az R M_R maximális ideáljára $M_R^0 = M_R \cap O(X^{(0)})$ valódi prímideál $O(X^{(0)})$-ban, amelyhez a $\mathbf{P}^n(k) \setminus V(X_0)$-lal izomorf affin térben az 1.1 Lemma bizonyítása szerint egyetlen P pont tartozik. Lokalizálva kapjuk, hogy erre a P-re valóban $O_{X,P} = O_{X^{(0)},P} \subseteqq R$. Ám itt valójában egyenlőség áll. Ha ugyanis t lokális paraméter R-ben, akkor ő $O_{X,P}$-ben is benne van, mert különben a diszkrét értékelésgyűrűkről mondottak szerint $1/t \in M_P^0 \subset R$ teljesülne, ami nem lehet. Hasonlóan látható, hogy R egységei is $O_{X,P}$-ben vannak, ami már bizonyítja a fordított irányú tartalmazást.

A függvénytest elemei tekinthetők a Riemann-felület nyílt részhalmazain reguláris k-értékű függvényeknek. Tetszőleges $f \in K(X)$ ugyanis az 1.1 Lemma következtében véges sok kivétellel minden lokális gyűrűnek eleme (mert egy véges affin fedés elemein az f-et reprezentáló törtfüggvények nevezői zárt részhalmazokat határoznak meg), és az így kapott nyílt halmaz minden pontjában már definiáltuk az f függvény értékét mint a maximális ideál szerinti faktorban vett képet. Ezt a gondolatmenetet az $1/f$ függvényre ismételve kapjuk, hogy f-nek a Riemann-felületen (vagy a görbén) csak véges sok pólusa van, ezért meromorf függvénynek is nevezhető. A Riemann-felület tetszőleges nyílt részhalmazán értelmezhetjük tehát a rajta reguláris racionális függvények családját mint az őt alkotó lokális gyűrűk metszetét. Ezzel lényegében „minden információt átmentettünk" a görbéről a Riemann-felületre, *kivéve azt, hogy a görbe hány dimenziós projektív térbe van ágyazva.*

Ez az észrevétel módot ad arra, hogy az absztrakt Riemann-felület fogalmát projektív görbéktől függetlenül is értelmezzük. Vegyük ugyanis a k alaptest egy egyszerű transzcendens bővítésének valamely K véges bővítését, és nézzük azon K hányadostestű diszkrét értékelésgyűrűket, amelyek tartalmazzák k-t. Mivel k algebrailag zárt, a maximális ideál szerinti faktor minden ilyen gyűrűben k-val izomorf. Nevezzük tehát (a K-hoz tartozó) absztrakt Riemann-felületnek azt az X topologikus teret, amelynek pontjai a fenti diszkrét értékelésgyűrűk, a Zariski-topológia zárt halmazai pedig azon gyűrűkből állnak, amelyek adott $f \in K$ elemet a maximális ideáljukban tartalmaznak, vagy ilyen halmazok metszetei. (A véges egyesítések a függvények szorzataival elintézhetők.) A K testet a Riemann-felület függvénytestének nevezzük, és ezentúl $K(X)$-szel jelöljük. Egy $f \in K(X)$ függvényt akkor mondunk regulárisnak az U nyílt halmazon, ha minden U-t alkotó gyűrűnek eleme.

A fenti fogalomalkotás előnye, hogy így számos görbékre vonatkozó tétel — köztük a Riemann–Roch-tétel is — a projektív beágyazástól függetlenül bizonyítható. De projektív beágyazhatósággal kapcsolatos állítások is kényelmesen megfogalmazhatók ezen a nyelven: a szingularitások feloldhatóságáról szóló tétel például a biracionális izomorfia definíciója alapján úgy is mondható, hogy *minden absztrakt Riemann-felülethez található olyan projektív görbe, amelynek ő a Riemann-felülete.*

A következő fejezetben látni fogjuk, hogy (a tágabb értelemben vett) absztrakt Riemann-felületeknek is csak a véges halmazok a valódi zárt részhalmazai. Most csupán azt jegyezzük meg, hogy a véges halmazok tényleg zártak is. Ehhez elég az egypontú halmazok zártságát (vagyis a T_1 szétválasztási axiómát) látni, azaz a Riemann-felület bármely két $R_1 \neq R_2$ pontjához olyan $f \in K(X)$ függvényt találni, amelynek R_1-ben van gyöke, de R_2-ben nincs. A 2.1 Tétel bizonyításának végén láttuk, hogy az $R_2 \subset R_1$ tartalmazás csak $R_1 = R_2$ esetén állhat fenn, így van olyan $f \in R_2$ elem, amely nincs R_1-ben. $1/f$ tehát jó választás.

Absztrakt Riemann-felületekre az 1.2 Tételtől függetlenül is igaz, hogy ha rajtuk egy racionális függvény mindenütt reguláris, akkor konstans. Ez azzal ekvivalens, hogy bármely $f \in K(X)$ függvény reciproka benne van valamelyik X-et alkotó diszkrét értékelésgyűrű maximális ideáljában. Vegyük észre, hogy amikor $K(X)$ szeparábilis $k(f)$ felett, az 1.6 Lemma éppen ezt állítja. A bizonyítást $p > 0$ karakterisztikában a teljesen inszeparábilis esetre vonatkozó egyszerű testelméleti megfontolások tehetik teljessé, amelyektől most eltekintünk. A következő fejezetben vázolni fogunk egy másik lehetséges bizonyítást.

Számelméleti analógiák. Legyen most t lokális paraméter az X görbe valamely pontjában, és tekintsük $k(t)$ beágyazását a $K(X)$ függvénytestbe, amelyről az előző fejezetben láttuk, hogy egy $\mathbf{P}^1(k)$-ra menő morfizmusnak felel meg. A Riemann-felületről az is megállapítható, hogy ennél a morfizmusnál melyik pont hová képződik. Nevezetesen a P pont $O_{X,P}$ lokális gyűrűjére $O_{X,P} \cap k(t)$ diszkrét értékelésgyűrű lesz $k(t)$ hányadostesttel, és így a 2.1 Lemma miatt egy $P^1(k)$-beli pont lokális gyűrűjét kell kapnunk, amely persze nem más, mint $t(P)$.

Ez az algebrai görbék *számelméleti nézőpontja*. A szituáció ugyanis teljesen analóg azzal, ahogyan az algebrai számtestek (vagyis $\mathbf{Q}$ véges bővítései) algebrai egészeit szokás vizsgálni. A K számtest algebrai egészeinek gyűrűjét valamely prímideál szerint lokalizálva szintén diszkrét értékelésgyűrűt kapunk, amelynek $\mathbf{Q}$-val való metszete ugyancsak egy jól ismert gyűrű: valamely prímszámmal nem osztható nevezőjű racionális törtek gyűrűje. Az algebrai egészek, illetve a görbe tulajdonságai tehát ebben a megközelítésben azon múlnak, hogy a $\mathbf{Z}$, illetve $k(t)$ prímideáljaihoz tartozó diszkrét értékelésgyűrűk „hogyan ágaznak el". A későbbiekben még bőven látunk példákat arra, hogy a két szituáció mennyire hasonló. Ezt az analógiát aknázza ki a Dedekind-gyűrűk, illetve a diszkrét értékelésgyűrűk általános elmélete, valódi egybetartozásuk azonban igazából a Grothendieck-féle sémák elméletének keretein belül érthető meg, amelyre itt nem tudunk kitérni.

Komplex Riemann-felületek. A fejezet zárásaképpen röviden áttekintjük azt az esetet, amikor a k alaptest a komplex számtest. Célunk mindössze az, hogy rámutassunk: a racionális függvények regularitásának, illetve sorba fejthetőségének itt valódi analitikus tartalma van, a projektív egyenesre menő morfizmusok pedig topológiai szempontból is vizsgálhatók. Bizonyítások helyett csak a megfelelő referenciákat tüntetjük fel.

$\mathbf{C}$ felett minden X projektív görbe természetes módon felruházható az ún. komplex topológiával: az n-dimenziós projektív teret a $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{(0,\dots,0)\}$-ból örökölt faktor-, a görbét pedig az altértopológiával látjuk el. Görbék esetén rögvest látszik, hogy ily módon a Zariski-topológiánál erősebb topológiát kapunk. De ez általában is igaz, hiszen elég csak a $\mathbf{C}^{n+1}$-beli homogén hiperfelületek zártságát látni, amelyek viszont $f^{-1}(0)$ alakúak valamely f homogén polinomra, vagyis egy zárt halmaz folytonos őspképei. Innen az is következik, hogy minden projektív varietás kompakt, ugyanis $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ evidensen $\mathbf{C}^{n+1}$ egységgömbjének folytonos képe. A komplex topológiát persze a 2.1 Állításban szereplő bijekción keresztül átmásolhatjuk az absztrakt Riemann-felületre is.

A komplex topológiával kapcsolatban a legfontosabb tény az, hogy ha t lokális paraméter X egy P pontjában, akkor ha $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$-n olyan $X_0, \ldots X_n$ koordinátafüggvényeket választunk, amelyek P-ben regulárisak, minden X_i-nek konvergens a t szerinti hatványsora P-nek egy alkalmas nyílt környezetében. Ezt a tételt általában az implicitfüggvény-tételből szokták levezetni (Safarevics [22]), de adható pusztán az algebrai struktúrára támaszkodó bizonyítás is (Eichler [4]). Vagyis P egy környezetében a pontok koordinátáit konvergens hatványsorok determinálják, így t tekinthető egy origó körüli komplex síkbeli tartományra képező lokális térképnek, amelynek révén a görbe egydimenziós komplex analitikus struktúrát kap. (Most válik érthetővé a lokális paraméter elnevezés!) Az egydimenziós komplex analitikus sokaságok pedig éppen a komplex Riemann-felületek.

Tekintsük most a t által meghatározott $\phi_t : X \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ morfizmust. Szorítkozzunk egyelőre arra az esetre, amikor a 0 nem elágazási pont. A következő fejezetben be fogjuk látni, hogy ilyenkor t lokális paraméter a 0 többi ϕ_t-ősképében is, és így ott is meghatároz egy-egy lokális térképet. Van tehát a 0-nak egy olyan U nyílt környezete, amelyre $\phi_t^{-1}(U)$ olyan nyílt halmazok diszjunkt egyesítésére esik szét, amelyeken ϕ_t U-ra menő lokális homeomorfizmust indukál. Ugyanezt mondhatjuk az összes többi olyan pontról, amely a morfizmusnak nem elágazási pontja, hiszen ezek ősképeiben alkalmas c-re $t - c$, vagy esetleg $1/t$ lokális paraméter lesz. Ha nincs elágazási pont, a topológiában azt mondják, hogy a ϕ_t leképezés *fedés*. (Vö. Schubert [19].) Ha van, akkor ϕ_t nem lesz mindig lokális homeomorfizmus. De mivel csak véges sok elágazási pont van, igaz lesz az, hogy a görbe minden P pontjának van olyan U nyílt környezete, amelyre a $\phi_{tU} : U \setminus \{P\} \to \phi_t(U) \setminus \{\phi_t(P)\}$ indukált leképezés fedés. Az ilyen leképezéseket *(lokális) elágazó fedéseknek* szokás nevezni, azon pontokat pedig (egyes szerzőknél a képeiket), amelynél ϕ_t az egész U-n nem indukál lokális homeomorfizmust, elágazási pontoknak. Az algebrai és a topológiai terminológia tehát (majdnem) megegyezik. Az 1.5 Tétel szerint az elágazási pontokat leszámítva minden pontnak legfeljebb $N = |K(X) : k(\phi_t)|$ ősképe van. Ezt úgy is mondják, hogy a ϕ_t elágazó fedés *N-levelű*.

Megfordítva, ha X olyan topologikus tér, amelyhez létezik $\phi : X \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ N-levelű X elágazó fedés, könnyen meggondolható, hogy X kompakt komplex analitikus sokasággá tehető oly módon, hogy $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ komplex térképeit a fedőleképezésen keresztül visszahúzzuk X-re. (Az elágazási pontok környékén persze vigyázni kell.) Így beszélhetünk az X-en reguláris, illetve meromorf függvényekről. Maga a fedőleképezés is meromorf függvénynek tekinthető X-en abban a szellemben, ahogyan a $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$-re menő morfizmusokat is azonosítottuk a racionális függvényekkel. Ugyanúgy látható, hogy ϕ a $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$-n meromorf függvények testének beágyazását indukálja az X-en meromorf függvények $M(X)$ testébe. Megmutatható (l. pl. Forster[5] vagy Halász [11]), hogy ez a testbővítés éppen N-edfokú. De tudván, hogy $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$-n minden meromorf függvény racionális, kapjuk, hogy $M(X)$ algebrai függvénytest. Így (felhasználva a szingularitások feloldhatóságáról szóló tételt) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk nemszinguláris komplex projektív görbék és $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ véges levélszámú elágazó fedései között. Belátható, hogy ez a megfeleltetés analitikus izomorfia is (vö. Gunning [10]).

Megjegyezzük végül, hogy minden egydimenziós kompakt komplex sokasághoz létezik $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$-re képező véges levélszámú elágazó fedés. A fentiek alapján nem nehéz látni, hogy ez a tétel azzal a nemtriviális ténnyel ekvivalens, miszerint kompakt Riemann-felületen létezik nemkonstans meromorf függvény. Ilyen függvény létezése következik a Riemann–Roch-tétel kompakt Riemann-felületekre vonatkozó alakjából (l. Forster [5], Gunning [10].) Mi az általunk adandó bizonyításban ki fogjuk használni az algebrai struktúrát, így e tétel bizonyításáról le kell mondanunk — cserében viszont olyan tételhez jutunk, amely minden karakterisztikában érvényes.

Jegyzetek. A fenti tárgyalás alapján módunkban áll néhány korábbi állítást a komplex test felett analitikus eszközökkel újra bizonyítani. Például az, hogy egy kompakt Riemann-felületen meromorf függvénynek csak véges sok pólusa lehet, következik abból, hogy ellenkező esetben a függvény reciprokának gyökhelyei valahol torlódnának, s így az unicitási tétel miatt csak azonosan 0 lehetne. Másik példa: kompakt Riemann-felületek között bármely morfizmus (vagyis a neki megfelelő analitikus leképezés) azért (is) szürjektív, mert olyan folytonos nyílt leképezés, amelynek a képe kompakt. (Az idézett komplex függvénytani tételekre azért hivatkozhattunk, mert lokális tulajdonságokról volt szó.) Így újra igazoltuk azt a fontos tényt is, hogy kompakt Riemann-felületen minden nemkonstans meromorf függvénynek van valahol pólusa.

A komplex projektív varietások algebrai és analitikus struktúrája közötti összefüggéseket Serre híres ún. GAGA-elve foglalja össze, amelyet később Grauert, Remmert és Grothendieck általánosítottak. Néhány elemi (de nemtriviális) speciális esetet tárgyal Mumford a [17] könyv 4. fejezetében.

3. Divizorok és lineáris rendszerek

A fejezetben X — ha másként nem jelezzük — mindvégig nemszinguláris projektív görbét jelöl.

Divizorok. Legyen $f \in K(X) \setminus \{0\}$ racionális függvény. Az előző fejezetekben láttuk, hogy f-nek X-en csak véges sok pólusa és gyöke lehet. Ha most $g \in K(X)$ olyan racionális függvény, amelynek minden gyök- és pólushelye megegyezik f-ével, ráadásul ezek multiplicitása is minden esetben azonos, akkor f/g mindenütt reguláris X-en, tehát csak konstans lehet, mégpedig jelen esetben 0-tól különböző konstans. Ezek szerint bármely f racionális függvényt konstans szorzó erejéig egyértelműen meghatároz egy olyan formális lineáris kombináció, amelyben a függvény gyök- és pólushelyei szerepelnek a multiplicitásukkal súlyozva, gyökök esetén pozitív, pólusok esetén negatív előjellel. Ezt a lineáris kombinációt *az f függvény divizorának* nevezzük, és (f)-fel jelöljük. Ha az összegben csak a pozitív együtthatójú tagokat tartjuk meg, az f *gyökdivizorához*, ha csak a negatív együtthatójúakat, akkor a *pólusdivizorához* jutunk.

Példa. Jó ismerősünkön, az $X_0X_1 = X_2^2$ projektív síkgörbén a $t = X_2/X_0$ függvény divizora $(t) = (1,0,0) - (0,1,0)$, az $1/s = X_0/X_1$ függvényé pedig $(1/s) = 2(0,1,0) - 2(1,0,0)$, hiszen mint láttuk, $s = t^2$ és t lokális paraméter $(1,0,0)$-ban.

Általában az X egy *divizorán* a görbe pontjai által generált $\mathrm{Div}(X)$ szabad Abel-csoport egy elemét értjük, vagyis véges sok pont valamilyen nemnulla egész együtthatókkal vett lineáris kombinációját. Az üres divizort 0-val jelöljük, a P pont D-beli együtthatóját pedig $v_P(D)$-vel. (Ha P nem szerepel D felírásában, akkor $v_P(D) = 0$.) A $D = n_1P_1 + \ldots n_kP_k$ divizor *foka* a $\deg D = n_1 + \ldots + n_k$ összeg. Világos, hogy deg: $\mathrm{Div}(X) \to \mathbf{Z}$ homomorfizmus. Az is látszik, hogy nem minden divizor függvénydivizor, hiszen nincs a görbén pl. olyan racionális függvény, amely mindenütt reguláris és csak a P pontban van gyöke. Olyan viszont van, amely P *egy környezetében* reguláris és ott csak P-ben tűnik el. Ezt az észrevételünket hamarosan hasznosítjuk is.

Mittag–Leffler-feltételek. A divizorok csoportján természetes módon bevezethető egy részbenrendezés, amelynél *pozitív divizorok*nak azokat tekintjük, amelyekben minden pont együtthatója pozitív. Ez a rendezés azért hasznos, mert segítségével bármely olyan típusú feltétel, amely valamely függvény gyök-, illetve póIushelyeit korlátozza, megfogalmazható divizorok közti egyenlőtlenség alakjában. Például az X görbén az $(f) - P + 3Q \geqq 0$ divizoregyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy az $f \in K(X)$ függvénynek P-ben legalább egyszeres gyöke, Q-ban pedig legfeljebb harmadrendű pólusa van, és mindenütt másutt reguláris. Adott D divizor esetén tehát felvethető egy Mittag–Leffler-típusú probléma: van-e olyan függvény, amelynek gyök- és póluseloszlását a D divizor szabályozza, azaz $(f) + D \geqq 0$? És ha igen, hány „lényegesen különböző"? Az utóbbi kérdés precíz megfogalmazásához vezessük be az $L(D) = \{f \in K(X) : (f) + D \geqq 0\}$ halmazt, amely nyilvánvalóan vektortér k felett. Most már a kérdés így tehető fel: mekkora $L(D)$ dimenziója? A Riemann–Roch-tétel egyik fontos következménye az lesz, hogy korlátot kapunk erre a dimenzióra, ami sok esetben minden problémát megold. Például ha egy pozitív divizorra $\dim L(D) = 1$, akkor $L(D)$ csak a konstans függvényekből áll (mert azok biztosan benne vannak). Általában egyelőre elégedjünk meg a következővel.

3.1. Lemma. *Bármely D divizorra az $L(D)$ vektortér véges dimenziós.*

Bizonyítás. Minthogy $D < D'$ esetén $L(D) \subset L(D')$, elegendő az állítást pozitív divizorokra bizonyítani. Másfelől a 2.3 Állítás következtében $L(0) = k$, így az állítás következni fog, ha megmutatjuk, hogy tetszőleges D pozitív divizor és $P \in X$ pont esetén az $L(D + P)/L(D)$ faktortér legfeljebb 1-dimenziós. Legyen ehhez $v_P(D) = m$, t lokális paraméter P-ben, és definiáljuk a $\Phi_t : L(D + P) \to k$ függvényt a $\Phi_t(f) = (t^{m+1}f)(P)$ formulával. Φ_t nyilvánvalóan lineáris, és a magtere éppen $L(D)$, mert a többi $L(D + P)$-beli függvénynek P-ben pontosan $(m + 1)$-rendű pólusa van. A homomorfizmustétel szerint tehát Φ_t a kérdéses faktorteret beágyazza k-ba.

Következmények.

(1) A bizonyításból adódik, hogy a $D \leqq D'$ divizorokra

$$\dim L(D') - \dim L(D) \leqq \deg D' - \deg D.$$

(2) Ha pedig D pozitív divizor, akkor

$$\dim L(D) \leqq \deg D + 1.$$

Függvénydivizorok és az osztálycsoport. A következő állítás szükséges feltételt ad arra, hogy mely divizorok lehetnek függvénydivizorok.

3.2. Állítás. *Függvénydivizorok foka* 0.

Ezt a fontos tényt most egy erősebb tételből vezetjük le. Megjegyezzük azonban, hogy az olvasó az utolsó két fejezetben további két közvetlen bizonyítást találhat. Sőt, a komplex esetben nem nehéz egy negyedik, topologikus bizonyítást is találni abból kiindulva, hogy a függvény $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ elágazó fedését indukálja.

3.3. Tétel. *Legyen X nemszinguláris projektív görbe, $f \in K(X)$. Ekkor az f gyökdivizora, $(f)_0$ N-edfokú, ahol $N = |K(X) : K(f)|$.*

A tételt $1/f$-re alkalmazva kapjuk, hogy a pólusdivizor is N-edfokú. A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő, egyébként is hasznos segédtételre.

3.4. Lemma (approximációs lemma). *Legyenek $P_1, \dots P_m$ az $X \subset \mathbf{P}^n(k)$ nemszinguláris görbe pontjai. Ekkor létezik olyan lokális paraméter P_1-ben, amely a többi P_i pontban reguláris és nem tűnik el.*

Következmény. Tetszőleges $k_1, \dots, k_m$ egész számokhoz létezik olyan $f \in K(X)$ függvény, amelyre $v_{P_i}(f) = k_i \quad (1 \leqq i \leqq N)$.

Bizonyítás. Elhagyva $\mathbf{P}^n(k)$-ból egy olyan hipersíkot, amely a kérdéses pontokat nem tartalmazza, feltehetjük, hogy a görbe a k^n affin térbe van ágyazva. (k algebrailag zárt, tehát végtelen!) Alkalmas lineáris transzformáció segítségével k^n-nek választható olyan koordinátázása, amelynek origója P_1, és a többi pont nincs rajta a a koordinátatatengelyeken. Állítjuk, hogy ekkor a görbén tekintett $X_1, \dots, X_n$ koordinátafüggvények egyike lokális paraméter $P_1 = (0, \dots, 0)$-ban. (Mint a fejezet elején szerepelt Példa mutatja, távolról sem lesz akármelyik jó.) $X_1, \dots, X_n$ ugyanis generálják a P_1 pontbeli lokális gyűrű M maximális ideálját. Ha valamennyiüknek többszörös gyöke volna P_1-ben, akkor $M = M^2$ teljesülne, ami ellentmondás a diszkrét értékelésgyűrűk 1. fejezetben tárgyalt struktúrájával.

Bizonyítás a 3.3 Tételre. Bevezetve az $M = \deg (f)_0$ jelölést, először az $M \leqq N$ egyenlőtlenséget igazoljuk. Legyen $\mathcal{H}$ az f gyökhelyeinek halmaza, és tekintsük tetszőleges D divizorra az $L_{\mathcal{H}}(D) = \{g \in K(X) : v_{P_i}(g) + v_{P_i}(D) \geqq 0, \text{ ha } P_i \in \mathcal{H}\}$ k-vektorteret. Minthogy itt a függvények viselkedését csak egy véges (esetleg üres) halmazon korlátozzuk, ezek a vektorterek nem lesznek véges dimenziósak. Nekünk viszont csak arra lesz szükségünk, hogy az $L_{\mathcal{H}}(0)/L_{\mathcal{H}}\big(-(f)_0\big)$ faktortér M-dimenziós. Hogy a dimenzió legfeljebb M, pontosan úgy bizonyítható, mint a 3.1 Lemma, az egyenlőséghez pedig annyit kell csak észrevenni, hogy az approximációs lemma következménye miatt minden lépésben található olyan függvény, amely a megfelelő Φ_t leképezésnél nem képződik 0-ra. Válasszunk ezután $L_{\mathcal{H}}(0)$-ban olyan $x_1, \ldots, x_M$ elemeket, amelyek a faktortér egy bázisára képződnek. Megmutatjuk, hogy ők $k(f)$ felett is függetlenek. Legyen ugyanis $\sum f_i x_i = 0$ nemtriviális lineáris kombináció. Feltehető, hogy minden együttható $f_i = a_i + f g_i$ alakú, ahol g_i $k[f]$-beli polinom, és az a_i konstansok nem mind 0-k. De ekkor $f g_i \in L_{\mathcal{H}}\big(-(f)_0\big)$ miatt a faktortérben teljesül a nemtriviális $\sum a_i \bar{x}_i = 0$ lineáris összefüggés, ami ellentmondás.

A fordított irányú egyenlőség azon múlik, hogy f transzcendens k felett. Legyen ugyanis $y_1, \ldots y_n$ $K(X)$ egy bázisa $k(1/f)$ felett, és válasszunk egy olyan D pozitív divizort, amelyre $(y_i) \geqq -D$ minden i-re. Ekkor tetszőleges l pozitív egész esetén

$$N(l+1) \leqq \dim L\big(l(f)_0 + D\big) \leqq lM + \deg D + 1, \tag{1}$$

ahol az első egyenlőtlenség abból adódik, hogy az $\{f^{-j} y_i : 1 \leqq i \leqq N, 0 \leqq j \leqq l\}$ k felett független függvényhalmaz $L\big(l(f)_0 + D\big)$-beli, a második pedig a 3.1 Lemma (2) Következménye. Innen $l(M - N) \geqq N - \deg D - 1$, ami minden l pozitív egészre csak $M \geqq N$ esetén állhat fenn.

Az iménti bizonyítás gondolatmenetével még bebizonyítunk egy állítást, amelyre a 6. fejezetben lesz szükségünk.

3.5. Lemma. *Létezik egy $c > 0$ konstans, amelyre tetszőleges D divizor mellett*

$$\deg D - \dim L(D) < c.$$

Bizonyítás. Az egyenlőtlenséget először olyan divizorokra igazoljuk, amelyek $l(f)_0$ alakúak valamely f nemkonstans függvénnyel. Ekkor az (1) képlet alsó becslését megtartva, de felülről a 3.1 Lemma (1) következménye alapján becsülve

$$N(l+1) \leqq \dim L\big(l(f)_0 + D\big) \leqq \dim L\big(l(f)_0\big) + \deg D$$

adódik, ahonnan $N = \deg (f)_0$ miatt átrendezve készen vagyunk. Általános D-re válasszunk először egy $D_1 \geqq D$ pozitív divizort. Ekkor az eddigiek és a 3.1 Lemma (1) Következménye szerint

$$\dim L\big(l(f)_0 - D_1\big) \geqq \dim L\big((f)_0\big) - \deg D_1 \geqq \deg l(f)_0 - c - \deg D_1,$$

ami elég nagy l-re pozitív. Legyen tehát $g \in L(l(f)_0 - D_1)$ nemnulla függvény, és tekintsük a $D_2 = D_1 - (g)$ divizort. Választásunk értelmében $l(f)_0 \geqq D_2$, így a már sokszor használt következmény szerint

$$\begin{aligned} \deg L(D) - \dim L(D) &\leqq \deg L(D_1) - \dim L(D_1) = \deg L(D_2) - \dim L(D_2) \\ &\leqq \deg L(l(f)_0) - \dim L(l(f)_0) < c. \end{aligned}$$

Példák. (1) A projektív egyenesen igaz a 3.2 Állítás megfordítása is. Legyen ugyanis $D = n_1P_1 + \ldots + n_kP_k$, $P_i = (a_i, b_i)$ a homogén koordinátákban. Ekkor $f_D = \prod_{i=1}^{k}(b_iX_0 - a_iX_1)^{n_i}$ éppen a $\deg D = 0$ feltétel miatt racionális függvény $\mathbf{P}^1(k)$-n, amelynek a divizora nyilvánvalóan D.

(2) Másfelől a 3.2 Állítás izomorfia erejéig csak a projektív egyenesre fordítható meg. Legyen ugyanis X olyan nemszinguláris projektív görbe, amely nem izomorf $\mathbf{P}^1(k)$-val, $P, Q \in X$ tetszőleges pontok. Megmutatjuk, hogy $P - Q$ nem függvénydivizor. Ha ugyanis volna olyan f, amelyre $(f) = P - Q$, akkor f gyökdivizorának foka 1 volna. Ez esetben a 3.3 Tétel szerint $K(Y) = k(f)$ teljesülne, vagyis a görbe biracionálisan izomorf, sőt a nemszingularitás miatt izomorf is volna $\mathbf{P}^1(k)$-val.

A példák után néhány újabb definíció. $\mathrm{Div}(X)$-nak a függvénydivizorok szerint vett faktorcsoportját $\mathrm{Cl}(X)$-nal jelöljük és *osztálycsoport*nak nevezzük. Két divizor *lineárisan ekvivalens*, ha az osztálycsoport egyazon mellékosztályában vannak. A 0 fokú divizorok részcsoportját $\mathrm{Div}^0(X)$-nal, ennek az osztálycsoportban vett képét pedig $\mathrm{Cl}^0(X)$-nal jelöljük. Az előző példákban tehát azt mutattuk meg, hogy az Y görbe pontosan akkor izomorf a projektív egyenessel, ha $\mathrm{Cl}^0(X)$ a végtelen ciklikus csoport.

Végül a most bevezetett fogalmakkal felírható a

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow K(X)^* \longrightarrow \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Cl}(X) \longrightarrow 0$$

egzakt sorozat, ahol a * a multiplikatív csoportot jelöli, a középső homomorfizmus pedig a függvénydivizor képzése. Ez a sorozat az algebrai számtestek elméletében járatosak számára bizonnyal ismerős: ott sorrendben az algebrai egészek gyűrűjének egységei, a számtest multiplikatív csoportja, az ún. törtideálok (az egészek gyűrűje felett végesen generált olyan modulusok, amelyek a test alkalmas nemzérus elemével szorozva ideálba mennek át, vagyis speciális „hányadosmodulusok"), és az ottani osztálycsoport szerepelnek a sorozatban. Itt jegyezzük meg azt is, hogy a 3.2 Állítás ugyancsak az algebrai számelmélet egyik fontos tételének, az ún. szorzatformulának a függvénytestekre vonatkozó megfelelője.

Függetlenség a projektív beágyazástól. A teljesség kedvéért most azt fogjuk vázlatosan ismertetni, hogyan bizonyíthatók az eddigi eredményeink nemszinguláris projektív görbék helyett (tágabb értelemben vett) absztrakt Riemann-felületekre. A felhasználásra kerülő kommutatív algebrai fogalmakkal és tételekkel kapcsolatban Matsumura [16] könyvének 9. és 11. alfejezeteire utalunk.

Minden, amire szükségünk van, következik az alábbi tételből.

3.6. Tétel. *Legyen X absztrakt Riemann-felület, $\mathcal{H} = \{R_1, \ldots, R_m\}$ az X-et alkotó diszkrét értékelésgyűrűk egy véges részhalmaza. Ekkor létezik olyan Y nemszinguláris affin görbe, amelynek a függvényteste $K(X)$, Y lokális gyűrűi között szerepelnek $\mathcal{H}$ elemei, és X-nek csak véges sok eleme nem lesz lokális gyűrűje Y-nak.*

Világos, hogy X Zariski-topológiája Y-on az affin Zariski-topológiát indukálja, így a tételből adódik, hogy minden absztrakt Riemann-felületnek létezik *véges* affin fedése. A fedés elemei ráadásul nyíltak (mert a komplementerük véges, tehát a T_1 axióma szerint zárt), így ugyanúgy, mint a projektív esetben, az 1.1 Lemmából kapjuk, hogy X-en minden racionális függvénynek véges sok gyöke és pólusa van, amivel a topológiát meghatároztuk. (Ez egyébként a bizonyításból közvetlenül is látszik majd.) Másrészt a tétel szerint bármely véges sok pontnak van affin környezete, amire kicserélve a 3.4 Lemma bizonyításának első mondatát kapjuk, hogy a 3.3 Tétel absztrakt Riemann-felületekre is igaz. Végül a tételből az 1.6 Lemma szeparabilitási feltevés nélkül is adódik, aminek következménye, hogy X-en minden reguláris függvény konstans.

Bizonyítás. Vegyünk egy x elemet a $\mathcal{H}$-t alkotó gyűrűk metszetéből. Ilyen x létezésénél többet bizonyítunk: az is kijön, hogy a maximális ideálok metszete sem üres. $m = 2$-re vegyünk ugyanis egy t lokális paramétert R_1-ben. Ha t benne van R_2-ben, készen vagyunk, ha nem, $y = 1/(1+t) \in R_1 \cap R_2$. R_1 és R_2 indukálják a $k(y)$ függvénytestű projektív egyenes egy-egy pontját, válasszuk tehát x-et úgy, hogy mindkettőben legyen gyöke. Az indukciós lépés ezután ugyanúgy megy.

Tekintsük most $k[x]$ A integrális lezártját $K(X)$-ben. A diszkrét értékelésgyűrűk integrális zártsága miatt $A \subset \bigcap R_i$. Ezen kívül A végesen generált k-algebra $K(X)$ hányadostesttel, tehát izomorf valamely $K(X)$ függvénytestű Y affin görbe koordinátagyűrűjével. Mivel A Dedekind-gyűrű is, az $M_i \cap A$ maximális ideál szerint lokalizálva diszkrét értékelésgyűrűt kapunk, ahol M_i az R_i maximális ideálját jelöli. A kapott gyűrű része R_i-nek, tehát a 2.1 Tétel bizonyítása szerint egyenlő is vele, azaz R_i tényleg Y valamely pontjának lokális gyűrűje. Az, hogy Y lokális gyűrűi között X-nek csak véges sok pontja nem szerepel, iménti konstrukciónk fényyében úgy is mondható, hogy csak véges sok X-beli gyűrű nem tartalmazza x-et. Ez viszont azzal ekvivalens, hogy a $k[1/x]$ algebra $k(X)$-beli integrális lezártjához tartozó affin görbén $1/x$-nek csak véges sok gyöke van, ami az 1.1 Lemma szerint igaz.

Divizorok lokális alakja. Ebben az alfejezetben — egy iménti megjegyzésünket általánosítva — a divizorok egy másik jellemzését adjuk. Legyen $D = n_1P_1 + n_2P_2 + \ldots + n_kP_k \in \mathrm{Div}(X)$ és $Q \in X$ tetszőleges pont. Az approximációs lemma miatt minden P_i pontban van olyan t_i lokális paraméter, amely Q-ban reguláris és nem tűnik el — kivéve persze, ha $Q = P_i$, ekkor bármelyik lokális paramétert vehetjük. Vegyük Q-nak egy olyan U_Q nyílt környezetét, amelyben a t_i-k mind regulárisak és legfeljebb P_i-ben tűnnek el (ha P_i egyáltalán benne van U_Q-ban), és tekintsük az $f_Q = \prod t_i^{n_i}$ függvényt. Világos, hogy a D és (f_Q) divizorok „U_Q-ba eső része" megegyezik. Az U_Q halmazokból X-nek egy véges $U_1, \ldots U_m$ fedését kiválasztva kapjuk, hogy D reprezentálható véges sok (U_i, f_i) párral, ahol f_i nem azonosan 0 meromorf függvény U_i-n (ezért csak U_i-re megszorítva értelmezzük), továbbá $i \neq j$ esetén $U_i \cap U_j$-n f_i/f_j reguláris és nem tűnik el.

Megfordítva, (U_i, f_i) pároknak minden, a fenti értelemben kompatibilis rendszere egyértelműen meghatározza a görbe egy divizorát. Rendeljük ugyanis hozzá minden f_i függvényhez a „lokális" divizorát U_i-ben. Az f_i/f_j hányadosokra tett feltételből következik, hogy az $U_i \cap U_j$ metszeteken ugyanazt a lineáris kombinációt kapjuk, így a fedés végessége miatt az egyes nyílt halmazokon kapott divizorokból egyértelműen összeállítható egy globális divizor. Látható, hogy egy ilyen módon definiált divizor akkor lesz pozitív, ha minden f_i függvény reguláris U_i-n. Tekinthetjük ezt is a pozitív divizorok definíciójának. Továbbá az is azonnal látszik, hogy az $\{(U_i, f_i) : 1 \leqq i \leqq l\}$ és $\{(V_j, g_j) : 1 \leqq i \leqq m\}$ rendszerekkel megadott divizorok összege az $\{(U_i \cap V_j, f_i g_j) : 1 \leqq i \leqq l, 1 \leqq j \leqq m\}$ divizor lesz.

Példa. Tudjuk, hogy $P^1(k)$-n nincs olyan racionális függvény, amelynek divizora (homogén koordinátákban) az $(1,1)$ pont lenne. Viszont az $(X_0 - X_1)/X_1$ lokális paraméter az $(1,0)$ „végtelenbeli" pont kivételével, az $(X_0 - X_1)/X_0$ lokális paraméter pedig a $(0,1)$ „origó" kivételével mindenütt reguláris. E két nyílt halmaz és rajtuk a megfelelő racionális függvények szolgáltatják a divizor lokális alakját.

Ha már tehát nem tudtunk minden divizorhoz egy globális racionális függvényt rendelni, „összefércelhetjük" lokálisan értelmezett függvényekből. Ez a definíció az analitikus nézőponthoz áll közelebb (kompakt analitikus sokaságokon tényleg így definiálják a divizorokat), másrészt az az előnye is megvan, hogy szinguláris görbék esetén is értelmes. Így most tetszőleges $X \subset \mathbf{P}^n(k)$ projektív görbére értelmezhetjük a *hiperfelülettel való metszet divizorát*: a hiperfelületet definiáló F m-edfokú homogén polinom az $X^{(i)}$ $(0 \leqq i \leqq n)$ affin nyílt fedés mindegyik elemén reguláris függvényt határoz meg (úgy, hogy F/X_i^m-t dehomogenizáljuk), ezek lesznek az (F, X) pozitív divizor lokális reprezentánsai. Másrészről gond nélkül definiálhatjuk a $D \in \mathrm{Div}(X_2)$ divizornak egy $\phi : X_1 \to X_2$ szürjektív morfizmusnál vett teljes inverz képét is: a $\phi^{-1}(D)$ divizor reprezentánsai a $(\phi^{-1}(U_i), \phi^* f_i)$ párok lesznek. Ezzel voltaképpen egy $\mathrm{Div}(X_2) \to \mathrm{Div}(X_1)$ homomorfizmust kapunk.

Példa. Vizsgáljuk meg, mi egy hiperfelülettel vett metszet divizorának geometriai tartalma nemszinguláris görbék esetén. Ekkor ugyanis tudjuk, hogy a divizor véges lineáris kombináció alakjában is felírható, és világos, hogy a divizor felírásában szereplő pontok éppen a hiperfelület és a görbe metszéspontjai lesznek. Az együtthatókat pedig úgy értelmezhetjük, mint az adott pontbeli metszet multiplicitását, így e pozitív divizor foka azt jelenti, hogy multiplicitással együtt hányszor metszi a hiperfelület a görbét. Például ha X nemszinguláris n-edfokú síkgörbe, az F m-edfokú háromváltozós homogén polinom is síkgörbét határoz meg, amely pontosan akkor lesz irreducibilis, ha F az. Tetszőleges másik G homogén m-edfokú polinomra

F/G-nek megfelel egy racionális függvény X-en, amelynek a divizora a 3.2 Állítás szerint 0 fokú. Ha most G egy olyan L lineáris polinom m-edik hatványa, amelynek egyenese általános helyzetben, tehát n pontban metszi a görbét, a (G, X), s ezáltal az (F, X) divizor foka is mn, vagyis az $F = 0$ síkgörbe multiplicitással számolva mn pontban metszi X-et. Ez *Bézout tétele*.

Az olvasó számára kellemes gondolkodnivalót jelenthet annak kitalálása, hogyan néz ki nemszinguláris görbék közti morfizmusok esetén egy divizor teljes inverz képe. (Mik lesznek a pontok együtthatói?) Puska az 5. Fejezetben.

Lineáris rendszerek. Adott $D \in \mathrm{Div}(X)$ mellett tekintsük mindazon *pozitív* divizorok $|D|$ halmazát, amelyek lineárisan ekvivalensek D-vel. Nyilvánvaló, hogy $|D|$ éppen az $(f) + D$ alakú divizorokból áll, ahol $f \in L(D)$. Láttuk, hogy az (f) és (g) függvénydivizorok pontosan akkor egyeznek meg, ha $f = cg$ valamely $c \in k$ konstanssal, így $|D|$ természetes módon azonosítható azzal a projektív térrel, amelynek pontjai $L(D)$ egydimenziós alterei, és amelynek dimenziója $\dim L(D) - 1$. Világos, hogy lineárisan ekvivalens divizorok esetén ugyanazt a $|D|$ teret kapjuk. $|D|$ neve *a D-hez tartozó teljes lineáris rendszer*, azon pozitív divizorokból álló halmazokat pedig, amelyek valamely $|D|$ d-dimenziós projektív alterei — tehát $L(D)$ $d+1$-dimenziós altereinek felelnek meg –, *d-dimenziós lineáris rendszereknek* nevezzük.

Lineáris rendszerre a legfontosabb példa X *d-edfokú hiperfelületekkel vett metszeteinek lineáris rendszere*, $L_X(d)$. Ez a rendszer adott d pozitív egész esetén az összes olyan hiperfelülettel vett metszet divizorából áll, amelyet d-edfokú homogén polinom határoz meg. Ily módon tényleg lineáris rendszert kapunk, hiszen ha F és G d-edfokú homogén polinomok, $(F, X) - (G, X)$ éppen az F/G racionális függvény divizora, vagyis $L_X(d)$-ben bármely két (pozitív) divizor lineárisan ekvivalens. Persze egyáltalán nem biztos, hogy ez a lineáris rendszer teljes, hiszen csak d-edfokú polinomok hányadosait használtuk. Be lehet viszont bizonyítani, hogy adott X görbe esetén elég nagy d-re $L_X(d)$ már biztosan teljes lesz. A $d = 1$ speciális eset a hipersíkokkal vett metszetek lineáris rendszere, ami azért különösen fontos, mert egyrészt könnyen áttekinthető, másrészt lényegében meghatározza X-nek a projektív térbe való beágyazását. Ha ugyanis feltesszük, hogy $X \subset \mathbf{P}^n(k)$ nem fekszik rajta egyetlen hipersíkon sem, akkor $\mathbf{P}^n(k)$ hipersíkjai — szemléletesen szólva — „végigsöprik" a görbét, és minden hipersíkkal való metszetet egy divizor „kódol". A témához kapcsolódik még egy definíció: lineáris rendszerről lévén szó, minden $L_X(1)$-ben levő divizornak ugyanaz a foka, s ezt a számot nevezzük a görbe *fokának*. Látható, hogy síkgörbék esetében a görbe foka megegyezik a definiáló polinom fokával, a definíció tehát a megszokott fogalom általánosítása.

A fenti észrevételek lehetővé teszik, hogy lineáris rendszerek segítségével információt szerezzünk a görbének racionális leképezéseknél vett képeiről, és eldöntsük, hány dimenziós projektív térbe ágyazható be. Legyen X nemszinguláris projektív görbe, és $\phi : X \to \mathbf{P}^n(k)$ adott morfizmus. Feltehető, hogy a $\phi(X)$ görbe —

amely az 1.2 Tétel szerint zárt részhalmaza $\mathbf{P}^n(k)$-nak, de lehetnek szingularitásai is — nem fekszik rajta egyetlen hipersíkon sem. Ekkor tekinthetjük $\phi(X)$-on a hipersíkokkal vett metszetek $L_{\phi(X)}(1)$ lineáris rendszerét, és képezhetjük minden $L_{\phi(X)}(1)$-beli divizor ϕ-nél vett ősképét. A kapott $L_\phi(X)$ halmaz lineáris rendszer X-en, mert morfizmusról lévén szó, pozitív divizorok ősképei is pozitív divizorok lesznek, valamint az $(F, \phi(X))$ és $(G, \phi(X))$ $L_{\phi(X)}(1)$-beli divizorok ősképeinek különbsége éppen a $(\phi^*(F/G))$ függvénydivizor lesz.

Felmerül a kérdés, hogy milyen $L(D)$ tér alterének fog megfelelni az $L_\phi(X)$ lineáris rendszer? Írjuk fel ehhez a ϕ-t definiáló $(f_0, \ldots, f_n)$ függvény-$(n+1)$-est, és vegyük az (f_i) divizorok D infimumát a bevezetett rendezésben (azaz azon pontokat a lehető legnagyobb együtthatókkal, amelyek minden függvénynek gyök- ill. póIushelyei). Reprezentáljuk D-t (U_j, d_j) alakú párokkal. U_j-n ϕ megadható az $(f_0/d_j, \ldots, f_n/d_j)$ $(n+1)$-essel, ahol minden f_i/d_j reguláris U_j-n. Ebből a felírásból azonnal látszik, hogy az $X_i = 0$ hipersíkkal vett metszet divizorának ősképe az $(f_i) - D$ divizor lesz, amiből lineárisan kiterjesztve megkapjuk a többi divizor ősképét is. $L_\phi(X)$ tehát az $L(-D)$ vektortér $f_0, \ldots, f_n$ generálta alteréből származtatott projektív térrel lesz izomorf. Ez az izomorfizmus persze függ a $\mathbf{P}^n(k)$-n vett X_i koordinátafüggvényektől, de nyilvánvalóan projektív automorfizmus erejéig egyértelmű. Mindkét felírásból látszik, hogy az $L_\phi(X)$ lineáris rendszer *fixpontmentes*, azaz nincs olyan pont, amely valamennyi $L_\phi(X)$-beli divizorban nemnulla együtthatóval fordul elő.

Megfordítva, tetszőleges n-dimenziós fixpontmentes lineáris rendszer projektív automorfizmus erejéig egyértelműen meghatároz egy $X \to P^n(k)$ morfizmust. Ehhez elegendő $L(D)$ megfelelő alterében tetszőleges $f_0, \ldots, f_n$ bázist választani, s a morfizmus máris készen áll. Könnyen látható, hogy az $(f_0, \ldots, f_n)$-nél vett kép nem fekszik rajta egyetlen hipersíkon sem, valamint hogy ez a konstrukció épp az előzőnek az inverze. De az sem okoz nagy gondot, ha a lineáris rendszerünk nem fixpontmentes. Ekkor egyszerűen kivonjuk minden divizorból az összes divizor infimumát, és az így kapott lineáris rendszer már definiál egy morfizmust.

Jegyzetek. A divizorok általunk adott mindkét bevezetése nagymértékben általánosítható varietásokra, sőt sémákra. Ezekről l. pl. Hartshorne [12] könyvét.

Bézout tétele is sokkal általánosabban igaz, mint ahogy itt említettük. Síkgörbékre - nemszingularitási feltétel nélkül - tárgyalja a kérdést pl. Fulton [7], vagy magyarul Kollár [13], projektív hiperfelületekre Safarevics [22]. Általánosításokkal és hasonló problémákkal az algebrai geometria egy nehéz ága, az ún. metszetelmélet foglalkozik.

4. Differenciálformák és a kanonikus osztály

Most rátérünk a Riemann–Roch-tétel másik fő hozzávalójára, a differenciálformák elméletére. A tárgyalás teljesen algebrai lesz, majd a fejezet vége felé ejtünk néhány szót az analitikus elméletről. Megjegyezzük azonban, hogy a differenciálformák ismerete csak a tétel végső alakjának megértéséhez szükséges, a 6. fejezetben ismertetendő kohomologikus Riemann–Roch-formulához viszont nem. Az olvasó tehát, ha kedve tartja, előrehozhatja a 6. fejezet olvasását.

Differenciálformák. Legyen A végesen generált (kommutatív) k-algebra, M pedig A-modulus. Azt mondjuk, hogy a $D : A \to M$ k-lineáris leképezés A *egy k-derivációja M-be*, ha teljesíti a Leibniz-szabályt: tetszőleges $a, b \in A$ elemekre $D(ab) = aD(b) + bD(a)$. Jelölje ezek halmazát $\mathrm{Der}_k(A, M)$. Látható, hogy $\mathrm{Der}_k(A, M)$ természetes módon A-modulus, továbbá az is, hogy a k-beli elemek deriváltja mindig 0.

Nézzük először a legegyszerűbb esetet, a $B = k[X_1, \ldots, X_n]$ polinomgyűrűt. A Leibniz-szabályból nyilvánvaló, hogy B-nek valamely B-modulusba menő bármelyik k-derivációját egyértelműen meghatározzák az X_i elemek képei. Ha tehát tekintjük a B^n szabad B-modulust, amelynek egy szabad generátorrendszerét $dX_1, \ldots, dX_n$ jelöli, az $X_i \mapsto dX_i$ hozzárendelés egyértelműen megad egy $d \in \mathrm{Der}_k(B, B^n)$ derivációt, amelynél a Leibniz-szabály szerint $d(X_i^n) = nX_i^{n-1}dX_i$. Ezenkívül tetszőleges $D \in \mathrm{Der}_k(B, M)$ deriváció a szabad modulus tulajdonságai miatt egyértelműen felírható $\phi \circ d$ alakban, ahol $\phi : B^n \to M$ modulushomomorfizmus. Vagyis kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kaptunk $\mathrm{Der}_k(B, M)$ és $\mathrm{Hom}_B(B^n, M)$ között, amely ráadásul modulusizomorfizmus is. Megmutatjuk, hogy általában is van olyan modulus, amely ebben a kontextusban a szabad modulus szerepét játssza.

4.1. Állítás. *Bármely $A = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ végesen generált k-algebrához létezik olyan $\Omega_{A/k}$ A-modulus és $d \in Der_k(A, \Omega_{A/k})$ deriváció, amelyre a $\phi \mapsto \phi \circ d$ hozzárendelés modulusizomorfizmust létesít $\mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M)$ és $\mathrm{Der}_k(A, M)$ között tetszőleges M A-modulus esetén. Ez a tulajdonság egyértelmű izomorfizmus erejéig meghatározza az $(\Omega_{A/k}, d)$ párt. Ha $f_1, \ldots, f_m$ az I ideál egy generátorrendszere, $\Omega_{A/k}$ megadható $dX_1, \ldots, dX_n$ generátorokkal és $\sum \partial_j f_i dX_j = 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$ relációkkal, ahol ∂_j a j-edik változó szerint vett parciális derivált, és a polinomokat ugyanúgy jelöltük, mint az A-ban vett képüket.*

$\Omega_{A/k}$ az A *algebra k-differenciálformáinak modulusa*. A k-s indexeket ezentúl elhagyjuk.

Bizonyítás. Legyen d: $B \to B^n$ a fent bevezetett standard deriváció. Állítjuk, hogy $\Omega_A = B^n/(IB^n + B \cdot dI)$ jó lesz, a hozzá tartozó standard deriváció pedig d-nek a $B^n \to \Omega_A$ természetes homomorfizmussal vett kompozíciója, amit talán nem baj, ha ugyancsak d-vel jelölünk. Szintén megtartjuk a dX_i jelölést B^n standard generátorainak a faktorban vett képeire, amelyek persze Ω_A generátorrendszerét alkotják. Tetszőleges $D' \in \mathrm{Der}(A, M)$ deriváció a $B \to A$ faktorizálással komponálva indukál egy $D \in \mathrm{Der}(B, M)$ derivációt, amelyről tudjuk, hogy egyértelműen áll elő $D = \phi \circ d$ alakban. A kapott $\phi : B^n \to M$ B-homomorfizmus azonban eltűnik IB^n-en és $B \cdot dI$-n, mert I annullálja M-et és $D(I) = 0$, következésképp ϕ A-homomorfizmust is indukál. Az egyértelműség triviális. Minthogy $B^n/IB^n \cong A^n$, a dX_i generátorok között összefüggések csak a dI generálta B-részmodulussal való faktorizálásnál léphetnek fel. Ilyenek lesznek $1 \leqq i \leqq m$ mellett a $df_i = 0$ egyenletek, amelyek a Leibniz-szabály alapján az állításban szereplő alakba írhatók. Más reláció azonban nem teljesül, mert I tetszőleges $\sum b_i f_i$ elemére $d(\sum b_i f_i) = \sum(f_i db_i + b_i df_i)$ már az eddigiek alapján is 0-ra kell hogy képződjön.

Differenciálformák görbéken. Most értelmezni szeretnénk a differenciálformák modulusát algebrai görbék függvényteste felett. A probléma csak az, hogy a függvénytest már nem végesen generált mint k-algebra. De ezen könnyen segíthetünk, hiszen az előző alfejezetben mondottak szóról szóra átvihetők végtelenül generált algebrákra is, csak végtelen változós polinomgyűrűvel és a fölötte vett végtelenül generált szabad modulussal kell dolgozni. Ily módon Ω_A-t tetszőleges k-algebrára definiáltuk. Ennél a konstrukciónál viszont végtelen sok generátort és végtelen sok relációt kapunk, ami nem valami kényelmes. A minket érdeklő esetben azonban szerencsénk van.

4.2. Lemma. *Legyen K az A végesen generált nullosztómentes k-algebra hányadosteste. Ekkor Ω_K természetes módon izomorf azzal a V K-vektortérrel, amelyet Ω_A egy generátorrendszere generál K felett, és a generátorok között az Ω_A-beli relációk lépnek fel.*

A tenzorszorzat segítségével a lemma az egyszerű $\Omega_K \cong \Omega_A \otimes_A K$ alakba írható.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan $\mathrm{Hom}_A(\Omega_A, M) \cong \mathrm{Hom}_K(V, M)$ bármely M K-vektortérre, így csak azt kell látni, hogy $\mathrm{Der}(A, M)$ minden eleme egyértelműen kiterjed K egy derivációjává. Ez viszont a hányados deriválási szabályából nyilvánvaló.

4.3. Állítás. *Legyen X tetszőleges görbe vagy absztrakt Riemann-felület. Ekkor $\Omega_{K(X)}$ 1-dimenziós vektortér $K(X)$ felett, amelyet tetszőleges olyan dt elem generál, amelyre $K(X)$ véges szeparábilis bővítése $k(t)$-nek.*

Hamarosan látni fogjuk, hogy minden görbének van nemszinguláris pontja, tehát az állításban szereplő t létezése következni fog az 1.4 Lemmából.

Bizonyítás. A szeparabilitás miatt $K(X) = k(t, y)$ valamely y racionális függvényre, és így izomorf az $A = k[t, Y]/(F)$ algebra hányadostestével, ahol F az y egy $k[t]$-beli együtthatós definiáló polinomja. Az előző lemma miatt $\Omega_{K(X)}$-et generálják dt és dY, az egyetlen köztük fennálló reláció pedig $0 = \partial_t F dt + \partial_Y F dY$. Ugyancsak a szeparabilitás következtében ebben az egyenletben dY együtthatója nem 0, s így kifejezhető dt-vel.

Igaz egyébként az állítás megfordítása is: ha dt generálja $\Omega_{K(X)}$-et, akkor $K(X)$ szeparábilis $k(t)$ felett.

A Zariski-kritérium. A differenciálformák segítségével világosságá válik a nemszingularitás fogalmának geometriai tartalma is.

4.4. Tétel (Zariski). *Legyen X tetszőleges görbe és jelölje a P pontbeli lokális gyűrűt a rövidség kedvéért R. Ekkor P pontosan akkor nemszinguláris pont, ha Ω_R egy elem által generált szabad R-modulus.*

Bizonyítás. Jelölje M az R maximális ideálját, ekkor tudjuk, hogy $R/M = k$. Az $\Omega_R/M\Omega_R$ és M/M^2 R-modulusok természetes módon k-vektorterek is. Először azt mutatjuk meg, hogy e két vektortér izomorf. Ehhez elég a duális terek izomorfiáját kimutatni. Nyilvánvalóan $\mathrm{Hom}_k(\Omega_R/M\Omega_R, k) \cong \mathrm{Hom}_R(\Omega_R, k)$, ez utóbbi modulus pedig definíció szerint izomorf $\mathrm{Der}(R,k)$-val. k a $\rho : R \to k$ természetes homomorfizmus által lesz R-modulussá, így $\delta \in \mathrm{Der}(R,k)$ esetén a Leibniz-szabály $\delta(ab) = \rho(a)\delta(b) + \rho(b)\delta(a)$ alakot ölt, amiből azonnal következik, hogy δ eltűnik M^2-en, vagyis M-re megszorítva indukál egy $M/M^2 \to k$ lineáris leképezést. Megfordítva, tetszőleges $r \in R$ elem egyértelműen áll elő $r = m+c$ ($m \in M$, $c \in k$) alakban, s ezért adott $\phi : M/M^2 \to k$ vektortérhomomorfizmus mellett az $r \mapsto \phi(\bar{m})$ leképezés jóldefiniált, ahol $\bar{m} = m \bmod M^2$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a leképezés valóban R egy k-ba menő derivációja, továbbá hogy a most definiált megfeleltetések lineárisak és egymás inverzei.

Mármost ha Ω_R egy elem által generált szabad R-modulus, akkor $\Omega_R/M\Omega_R$, és így M/M^2 is egydimenziós k-vektorterek. Ekkor viszont a Nakayama-lemma most következő parafrázisából $A = M$ választással adódik, hogy R diszkrét értékelésgyűrű.

4.5. Lemma. *Legyen R lokális gyűrű M maximális ideállal. Ha az A végesen generált R-modulusra A/MA egydimenziós R/M-vektortér, akkor bármely $t \in A \setminus MA$ elem generálja A-t R felett.*

A Lemma bizonyítása. Tekintsük A egy minimális $t = a_0, a_1, \ldots, a_n$ generátorrendszerét és tegyük fel indirekte, hogy $n \geqq 1$. Feltehető továbbá az is, hogy $a_n \in MA$ (különben kicserélhetjük $a_n - rt$-re alkalmas $r \in R$-rel). Ekkor léteznek $m_0, \ldots, m_n \in M$ elemek úgy, hogy $a_n = m_0a_0 + \ldots + m_na_n$, amiből $(1-m_n)a_n = m_0a_0 + \ldots + m_{n-1}a_{n-1}$. Itt $1 - m_n$ egység R-ben (máskülönben a Zorn-lemma miatt benne volna egy maximális ideálban, vagyis M-ben), tehát a_n kifejezhető az egyenletből, ami ellentmondás a generátorrendszer minimalitásával.

Másfelől ha R diszkrét értékelésgyűrű, akkor M/M^2, tehát $\Omega_R/M\Omega_R$ is egydimenziós vektorterek. Az előző lemmát $A = \Omega_R$-re alkalmazva ebből azt kapjuk, hogy az Ω_R R-modulus generálható egy elemmel, amely például választható dt-nek valamely t lokális paraméterrel. Ha Ω_R-ben teljesülne egy nemtriviális $fdt = 0$ reláció, annak a 4.2 Lemma miatt az $\Omega_{K(X)}$ vektortérben is fel kellene állnia, ami nem lehet, tehát Ω_R szabad. Megjegyezzük még, hogy ez az irány a 4.3 Állításból egyszerűbben is levezethető, az általunk adott bizonyítás viszont általánosabb keretek közt is működik (l. a Jegyzeteket).

A tételnek az a feltétele, hogy Ω_R 1 rangú szabad R-modulus legyen, voltaképpen egy természetes differenciálhatósági kritérium átfogalmazása. Minthogy lokális problémáról van szó, feltehetjük, hogy $X \subset k^n$ affin görbe, amelyet az $f_1, \ldots, f_m$ polinomok definiálnak. (A dimenziófeltevés miatt nyilvánvalóan $m \geq n-1$!) Az $O(X)$ koordinátagyűrű feletti differenciálformák modulusa a 4.1 Állítás szerint megadható a $dX_1, \ldots, dX_n$ generátorokkal és $\sum \partial_j f_i dX_j = 0$ alakú relációkkal, továbbá ugyanúgy meggondolható, mint a 4.2 Lemmában, hogy a generátorok és relációk nemcsak a hányadostest, de hányadosgyűrű képzésekor is megőrződnek. Az tehát, hogy az Ω_R szabad modulus rangja 1, azt jelenti, hogy a $\sum \partial_j f_i dX_j = 0$ relációk $n-1$ különböző lineáris összefüggést adnak meg a dX_j generátorok között, ahol a $\partial_j f_i$-ket mint az R lokális gyűrű elemeit tekintjük. A 4.5 Lemma lényegében azt állította, hogy ez ekvivalens azzal, hogy a $\partial_j f_i$-ket mod M redukálva a kapott k-beli együtthatós lineáris egyenletek között $n-1$ független van, de minthogy a mod M redukálás definíció szerint a racionális függvény kiértékelése volt a P pontban, mindez másképpen úgy fogalmazható, hogy a $[\partial_j f_i(P)]$ $n \times m$-es Jacobi-mátrix rangja $n-1$, ami már ugyancsak ismerősen hangzik. A legegyszerűbb esetben, amikor síkgörbéről van szó, azaz $n = 2$, a feltétel mindössze annyit jelent, hogy a görbét definiáló f polinom parciális deriváltjai közül valamelyik nem tűnik el P-ben.

A tétel most kapott Jacobi-mátrixos átfogalmazásából egyébként az is könnyen adódik, hogy a szinguláris pontok halmaza zárt a Zariski-topológiában: csupán az $(n-1) \times (n-1)$-es aldeterminánsok zérushelyeit kell egyesíteni. Görbék esetében tehát véges sok pontról van szó, amihez csak azt kell meggondolni, hogy egyáltalán létezik nemszinguláris pont. Ez többféleképpen is belátható. Vegyük pl. észre, hogy ha $\phi : X_1 \to X_2$ biracionális izomorfizmus, akkor X_1-nek és X_2-nek a definícióból következően vannak izomorf nyílt részhalmazai, tehát az 1.3 Lemma segítségével visszavezethetjük a kérdést síkgörbék esetére, ahol viszont a Jacobi-kritérium már nagyon egyszerű, így a befejezést az olvasóra bízzuk. ($p > 0$ karakterisztikában azért óvatosnak kell lenni!)

Kanonikus divizorok. Legyen t lokális paraméter az X nemszinguláris görbe P pontjában. Tudjuk, hogy ekkor dt generálja mind az $\Omega_{K(X)}$ $K(X)$-vektorteret, mind pedig az $\Omega_{O_{X,P}}$ $O_{X,P}$-modulust. Ennél azonban többet is mondhatunk.

Tekintsük a t-hez tartozó $X \to \mathbf{P}^1(k)$ morfizmust, amelynél az 1.5 Tétel szerint a véges sok elágazási pont kivételével minden $\mathbf{P}^1(k)$-beli pontnak $|K(X) : k(t)|$ őskképe van. Ha Q képe nem elágazási pont, a 3.3 tétel szerint a $t - t(Q)$ függvény gyökdivizorában minden pont 1 multiplicitással szerepel, és így $t - t(Q)$ lokális paraméter Q-ban. Ebből $d(t - t(Q)) = dt - dt(Q) = dt$ figyelembevételével adódik, hogy X egy nyílt U_t részhalmazán dt minden $\Omega_{O_{X,Q}}$ modulusnak generátora. Ha most t' X egy másik P' pontjában lokális paraméter, akkor minden $Q \in U_t \cap U_{t'}$ pontban dt és dt' is generálják az $\Omega_{O_{X,Q}}$ szabad modulust. Másfelől dt egyértelműen írható $dt = g dt'$ alakba valamely $g \in K(X)$ függvénnyel, de akkor ennek a g-nek az egyértelműség miatt $O_{X,Q}$-ban kell lennie, és mivel a szituáció szimmetrikus, nem tűnhet el Q-ban.

Azt kaptuk tehát, hogy minden $\omega \in \Omega_{K(X)}$ differenciálformának létezik az U_t nyílt halmazon egy $\omega = f_t dt$ „lokális felírása", ahol f_t-nek véges sok pólusa van U_t-n, és dt generálja $\Omega_{O_{X,Q}}$-et U_t minden Q pontjában. (Persze ha f_t-nek pólusa van Q-ban, $f_t \notin \Omega_{O_{X,Q}}$.) A nyílt fedés két különböző elemén pedig ω reprezentánsai között az „átmenetfüggvények" regulárisak. Ez a lokális felírás lehetővé teszi, hogy az U_t halmazok közül egy véges fedést kiválasztva kényelmesen értelmezzük az ω differenciálforma (ω) divizorát úgy, hogy U_t-n az f_t függvényt tekintjük lokális reprezentánsnak. Így valóban divizort definiáltunk, mert az $U_t \cap U_{t'}$ nyílt halmazon $f_t/f_{t'}$ éppen a $dt = gdt'$ formulával megadott g racionális függvénnyel egyenlő, amelyről láttuk, hogy reguláris és nem tűnik el a metszeten. ω-t reguláris differenciálformának mondjuk, ha a divizora pozitív, és kézenfekvően értelmezhető ω adott pontban vett gyökének, ill. pólusának multiplicitása is. (Vigyázat! $\omega = fdt$ esetén $(\omega) \neq (f)$! L. pl. a következő fejezet első Példáját.)

A 4.3 Állítás miatt a most definiált divizorok $\mathrm{Cl}(X)$-nek ugyanabban a mellékosztályában vannak, amelyet *kanonikus osztálynak* nevezünk, magukat a divizorokat pedig *kanonikus divizorok*nak. A kanonikus osztály szokásos jelölése K_X. A 3.5 Lemma utáni Példák mutatják, hogy ha $X \not\cong \mathbf{P}^1(k)$, nem minden divizor lesz kanonikus, azaz nem minden lokális felíráshoz tartozik globális differenciálforma. Hogy pontosan melyekhez tartozik, arra a Riemann–Roch-tételből kapunk majd választ.

Ha most $D = (\omega) \in K_X$, akkor $L(D)$-ben definíció szerint azok az $f \in K(X)$ racionális függvények vannak, amelyekre $(f) + (\omega) \geqq 0$, vagy másképpen szólva azok, amelyekre $f\omega$ az egész X-en reguláris. Ezzel izomorfizmust kaptunk $L(D)$ és az X-en reguláris differenciálformák k-vektortere között, amelyről így kiderült, hogy véges dimenziós. $L(D)$ dimenziójáról tehát megtudtuk, hogy egyrészt csak a kanonikus osztálytól, másrészt csak a függvénytesttől függ, s ez utóbbi miatt biracionális izomorfiára nézve invariáns. Ezt a dimenziót nevezzük a görbe *(geometriai) nemének* vagy *génuszának.*

Példa (*Elliptikus görbe Legendre-alakban*). Legyen $\mathrm{char}\, k \neq 2$ és tekintsük különböző $e_1, e_2, e_3 \in k$ konstansok mellett az

$$X_1^2 X_2 = (X_0 - e_1 X_2)(X_0 - e_2 X_2)(X_0 - e_3 X_2)$$

egyenletű X projektív síkgörbét. Ennek az $X^{(2)}$ affin síkgörbén kívül $P_\infty = (0, 1, 0)$ az egyetlen pontja. A Zariski-kritérium utáni megjegyzések segítségével könnyen ellenőrizhető, hogy X nemszinguláris. Vezessük be $X^{(2)}$ koordinátafüggvényeire az $x = X_0/X_2$ és $y = X_1/X_2$ jelöléseket. Így $X^{(2)}$ egyenlete a szimpatikusabb

$$y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

alakot ölti.(Azért x-et és y-t továbbra is mint $K(X)$ elemeit tekintjük.) y lokális paraméter a $P_i = (e_i, 0)$ $(i = 1, 2, 3)$ affin koordinátákban felírt pontokban, mert koordinátatranszformációval rögtön látszik, hogy P_i M_i maximális ideálját generálják y és $(x - e_i)$, de ez utóbbi már benne van M_i^2-ben mint y^2 egységszerese. Látható továbbá, hogy $z = X_0/X_1$ lokális paraméter P_∞-ben (hiszen a 3.4 Lemma bizonyítása szerint $X^{(1)}$ valamelyik koordinátafüggvénye az), s így végül a 3.2 Állítással összhangban adódik, hogy $(y) = (P_1) + (P_2) + (P_3) - 3(P_\infty)$.

De a dx differenciálnak is ugyanez a divizora! P_i $(i = 1, 2, 3)$ lokális gyűrűjében ugyanis $x - e_i = u_i y^2$, ahol u_i egység, ahonnan $dx = d(x - e_i) = y^2 du_i + 2u_i y dy$, s mivel a lokális gyűrűben $du_i = g_i dy$ egy P_i-ben reguláris g függvényre, itt a gyök valóban egyszeres. A P_∞-beli pólus az $x = yz$ egyenlőségből kiindulva hasonlóan tárgyalható. Ezek szerint $(dx/y) = 0$, vagyis a kanonikus osztály triviális, $L(0) = k$ miatt pedig a görbe neme 1.

Jegyzetek. A 4.4 Tétel bizonyítással együtt gond nélkül általánosítható n-dimenziós varietásokra a következőképpen: a differenciálformák modulusa akkor és csak akkor lesz valamely pontban n rangú szabad modulus, ha az ottani R lokális gyűrű ún. reguláris lokális gyűrű, azaz $\dim_k M/M^2 = n$ (= a függvénytest transzcendenciafoka). Ha a pont egy affin környezete N-dimenziós affin térbe van ágyazva, akkor a fentiekkel ekvivalens az is, hogy a szövegben bevezetett Jacobi-mátrix rangja $N - n$.

A bizonyításban szereplő fogalmak egyébként az algebrai varietások differenciálgeometriájában fontosak: M/M^2 neve például *(Zariski-féle) kotangenstér*, ennek k-duálisa pedig a *tangenstér*. Visszatérve az X görbére, a bizonyításbeli izomorfizmus egy t lokális paraméter mod M^2 képének épp a dt differenciálformát feleltette meg. Így egy ω reguláris differenciálforma felfogható úgy is, mint olyan X-en értelmezett leképezés, amely minden pontnak az ottani kotangenstér egy elemét felelteti meg, és a pont egy nyílt környezetében $\omega = f_t d_t$ alakba írható valamely t lokális paraméterrel és f_t reguláris függvénnyel. A komplex test felett t egy lokális térképet ad meg, és így épp a reguláris differenciálformák szokásos analitikus definíciójához jutunk. Ezután már magától értetődő, hogy $\Omega_{K(X)}$ elemei $\mathbf{C}$ felett meromorf differenciálformák lesznek.

5. A tétel és néhány következménye

A tétel. A várva várt állítás a következőképpen szól.

5.1. Tétel (Riemann–Roch). *Legyen X g nemű nemszinguláris projektív görbe vagy absztrakt Riemann-felület, K egy kanonikus, D pedig tetszőleges divizor X-en. Ekkor*

$$\dim L(D) - \dim L(K - D) = \deg D - g + 1.$$

Példa. Bebizonyítjuk a tételt az $X = \mathbf{P}^1(k)$ speciális esetben. Ehhez először azt mutatjuk meg, hogy a projektív egyenes neme 0.

Fixáljunk egy koordinátázást, amelyben $(0, 1)$ az origó és $(1, 0)$ a végtelenbeli pont. Ha t lokális paraméter az origóban, bármely $c \in k$-ra $t - c$ lokális paraméter c-ben, és így a dt differenciálforma mindegyik véges pontban reguláris és nem tűnik el. A végtelenben viszont $1/t$ lokális paraméter, és a Leibniz-szabályból $dt =$

$-t^2 d(1/t)$, tehát dt-nek itt másodrendű pólusa van. Viszont tetszőleges $\omega = f dt \in \Omega_{\mathbf{P}^1(k)}$ differenciálformára a definíciókból és a 3.2 Állításból adódóan $\deg(\omega) = \deg(f) + \deg(dt) = -2$, tehát valóban nincsenek reguláris differenciálformák, más szóval $L(K) = 0$.

A Riemann–Roch-formulát mármost elég pozitív divizorokra belátni, mivel könynyen meggondolható a 3.1 Lemma bizonyítása alapján, hogy az egyenlet baloldala additívan viselkedik. (Ez általában is igaz lesz, l. majd a bizonyításban.) Ha viszont D pozitív, $L(K-D) \subset L(K) = 0$ miatt csak $\dim L(D) = \deg D + 1$-et kell megmutatni, ami ismét csak könnyen adódik $\mathrm{Cl}^0\left(\mathbf{P}^1(k)\right) = 0$ felhasználásával.

A tétel következményei.

(1) $\dim L(K) = g$.

(2) $\deg K = 2g - 2$.

(3) Ha $\deg D > 2g - 2$, akkor $\dim L(D) = \deg D - g + 1$.

Itt (1) és (2) $D = 0$, illetve $D = K$ választással adódnak a Tételből, felhasználva a már sokszor szerepelt $L(0) = k$ állítást. (3) az előző kettőből következik, felhasználva, hogy negatív D-re $L(D)$ csak a 0-ból áll. Azon divizorokat egyébként, amelyekre a (3)-beli egyenlőség fennáll, történeti okokból *nemspeciális divizorok*nak szokás nevezni, a Riemann–Roch-formulában szereplő $\dim L(K - D)$ tagot pedig *specialitásindex*nek.

Differenciálformák és függvények adott divizorral. A következő állítás eldönti előírt gyökökkel és pólusokkal rendelkező differenciálformák létezését.

5.2. Állítás. *D akkor és csak akkor kanonikus divizor, ha $\deg D = 2g - 2$ és $\dim L(D) = g$.*

Bizonyítás. A szükségesség az előbbi (1) és (2) következményekben foglaltatik. Másfelől valamely K kanonikus divizorral felírva D-re a Riemann–Roch-formulát $\dim L(K-D) = 1$ adódik. De $(f)+K-D \geqq 0$ a $\deg(f)+\deg K-\deg D = 0$ feltétel miatt csak úgy lehet, ha $(f) + K - D = 0$, vagyis ha D a kanonikus osztályban van.

Függvényekre már korántsem ilyen egyszerű a helyzet.

5.3. Állítás. *Legyen $P \in X$ tetszőleges pont. Pontosan g darab m pozitív egész szám kivételével mindig létezik olyan racionális függvény Y-on, amelynek pólusdivizora mP. A kivételes értékeket Weierstrass-hézagoknak mondjuk.*

A komplex esetben meg lehet mutatni, hogy véges sok pont kivételével minden pontban $1, \ldots, g$ a Weierstrass-hézagok, de $g > 1$ mellett vannak is kivételes pontok. Lásd erről Kollár [13].

Bizonyítás. A tétel (3) következménye miatt $m \geqq 2g - 1$ esetén $\dim L(mP) = m - g + 1$, következésképpen $L(m+1)P \setminus L(mP)$ nem üres. Minthogy ezek szerint $\dim L((2g-1)P) = g$ és tudjuk, hogy $\dim L(0) = 1$, a két érték között az $L(mP)$ vektorterek dimenziójában $(g-1)$-szer lehet ugrás.

Következmény. Ha X g nemű görbe, létezik $f \in K(X)$ racionális függvény, amelyre $|K(X) : k(f)| \leqq g+1$. Az indukált $X \to \mathbf{P}^1(k)$ morfizmusnál minden pontnak legfeljebb $g+1$ ősképe van. A komplex esetben X mint kompakt Riemann-felület legfeljebb $g+1$ levelű.

Bizonyítás. Az előző állítás szerint tetszőleges $P \in X$ ponthoz található olyan $f \in K(X)$ függvény, amelynek P-ben legfeljebb $(g+1)$-rendű pólusa van, másutt pedig reguláris. A többi ezek után már következik a 3.3 és 1.5 Tételekből.

A $g = 1$ eset mutatja, hogy a Következmény becslése általában nem javítható, hiszen mint láttuk, $\mathbf{P}^1(k)$ neme 0.

Elágazás és kanonikus divizorok. Legyen ϕ morfizmus az X_1 és X_2 nemszinguláris projektív görbék (vagy absztrakt Riemann-felületek) között. Ha a $P \in X_1$ pont a $Q \in X_2$ pontra képződik, értelmezzük ϕ P-beli e_P *elágazási indexét* mint tetszőleges Q-beli t lokális paraméter mellett a $\phi^*t \in O_{X_1,P}$ racionális függvény P-beli zérushelyének multiplicitását. (Ha nem értelemzavaró, a P-s indexet többnyire el fogjuk hagyni). Nyilvánvaló, hogy a definíció nem függ t választásától, valamint $e_P \geqq 1$. Könnyen meggondolható továbbá, hogy egy $D \in \mathrm{Div}(X_2)$-beli divizor teljes inverz képének globális felírásában a D-beli pontok őséképei fognak szerepelni, az együtthatók pedig éppen a megfelelő elágazási indexekkel szorzódnak. A komplex esetben mindez azt jelenti, hogy a P-beli, illetve Q-beli lokális paraméterek által megadott komplex térképeken a leképezés lokálisan úgy fest, mint a $z \mapsto z^e$ függvény.

5.4. Állítás. *Legyen a ϕ által indukált $K(X_2) \subset K(X_1)$ testbővítés foka N. Ekkor*

$$\sum_{\phi(P)=Q} e_P = N.$$

Bizonyítás. Vegyünk egy olyan $f \in K(X_2)$ függvényt, amelynek Q-ban m-edrendű pólusa van, másutt pedig reguláris. Ilyen az előző állítás miatt létezik. A 3.3 Tétel szerint $|K(X_2) : k(f)| = m$, és így az összetett leképezésnél $|K(X_1) : k(f)| = Nm$. De a ϕ^*f függvény pólusdivizora éppen $m\sum e_P$, ahonnan a 3.3 Tétel ismételt alkalmazásával készen vagyunk.

Az 1.5 Tétellel összevetve az is adódik, hogy véges sok kivétellel minden pontban az elágazási index 1. Megjegyezzük, hogy az állítás szokásos bizonyítása tisztán kommutatív algebrai eszközöket használ, így viszont kaptunk egy egyszerű geometriai bizonyítást.

Most megmutatjuk, milyen szoros kapcsolat van a ϕ leképezés elágazásai és a görbék kanonikus osztályai között. Az alábbiakban feltesszük, hogy ϕ mindenhol *szelíden* ágazik el, azaz a véges sok 1-nél nagyobb elágazási index egyike sem osztható a k alaptest karakterisztikájával.

Először is ha $\omega = f dt \in \Omega_{K(X_2)}$ differenciálforma, természetes módon értelmezhető a $\phi^*\omega = \phi^* f d(\phi^* t) \in \Omega_{K(X_1)}$ indukált differenciálforma. Vizsgáljuk meg közelebbről $\phi^*\omega$ lokális alakját. Mint az előző fejezetben láttuk, ha t lokális paraméter a $Q \in X_2$ pontban, akkor Q egy U_t nyílt környezetén kapunk egy $\omega = f_t dt$ lokális felírást. Ha $Q = \phi(P)$ és s lokális paraméter P-ben, ϕ szürjektivitása miatt $\phi^* t = us^e$ egy $O_{X_1,P}$-beli egységgel, tehát $d(\phi^* t) = s^e du + eus^{e-1} ds = vs^{e-1} ds$ egy másik v egységgel. (Vö. az előző fejezet végén szerepelt Példa tárgyalásával!) Ezek szerint $\phi^*(\omega)$-t a $\phi^{-1}(U_t)$ halmazon $\phi^* f \cdot vs^{e-1} ds$ reprezentálja, amivel $\phi^*\omega$ lokális felírását kaptuk, hiszen mint az előző fejezetben láttuk, két U_t nyílt halmazon ω felírása csak olyan szorzóban különbözik, amely a metszet lokális gyűrűiben egység, márpedig ϕ^* a lokális gyűrűk egységeit egységekbe viszi. Meggondolásainkból a következő adódott.

5.5. Állítás. *A most tárgyalt differenciálformák divizoraira*

$$(\phi^*\omega) = \phi^{-1}(\omega) + \sum_{P \in X_1} (e_P - 1)P.$$

A jobboldalon álló második tagnak az algebrai számelméletben szokásos elnevezése a *differens.*

Következmény (Hurwitz-formula).

$$2g_1 - 2 = N(2g_2 - 2) + \sum_{P \in X_1} (e_P - 1).$$

ahol g_i az X_i neme ($i = 1, 2$), és $N = |K(X_1) : K(X_2)|$.

Bizonyítás. Vegyük az állításban szereplő divizorok fokát és használjuk fel a divizor teljes inverz képéről mondottakat, az 5.4 Állítást, valamint a Riemann-Roch-tétel (2) következményét.

Példa. Megmutatjuk, hogy az X nemszinguláris d-edfokú projektív síkgörbe neme $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. Alkalmas projektív lineáris transzformációval elérhető, hogy a $P = (0, 0, 1)$ pont ne legyen a görbén, az $X_0 = 0$ egyenes pedig általános helyzetben, tehát d pontban messe. Tekintve az $f = 0$ egyenletű $X^{(0)}$ affin görbét, és áttérve az $x = X_1/X_0$, $y = X_2/X_0$ affin koordinátákra, látjuk, hogy a P-ből az $X_2 = 0$ egyenesre való vetítést éppen az x racionális függvény adja meg. Alkalmazzuk a Hurwitz-formulát erre a morfizmusra. Tekintve, hogy $P^1(k)$ neme 0, most már elég annyit megmutatnunk, hogy a differens foka $d(d-1)$.

Tekintsük x-et mint a 0-beli lokális paramétert a projektív egyenesen, és vizsgáljuk a $dx \in \Omega_{\mathbf{P}^1(k)}$ differenciálforma indukált képét. Ha az $(a, b) \in X^{(0)}$ pontban $x - a$ lokális paraméter, az e elágazási index 1, ha viszont nem, akkor mint az approximációs lemma bizonyításában láttuk, $y - b$ lesz lokális paraméter, és dy generálja az ottani lokális gyűrű felett a differenciálformák modulusát. E modulusban az egyetlen fellépő reláció $\partial_x f dx = -\partial_y f dy$, következésképp $e-1$ megegyezik $\partial_y f$ (a,b)-beli gyökének multiplicitásával. ($\partial_x f(a,b) \neq 0$, mert a Zariski-kritérium szerint nincs $\partial_y f$-fel közös gyöke, és dy generálja $\Omega_{K(X)}$-et is.) Így a differens foka azt jelenti, hogy a $\partial_y f = 0$ homogenizálásával kapott $(d-1)$-edfokú projektív síkgörbe multiplicitással együtt hányszor metszi X-et (ui. a tett feltevés miatt az $X_0 = 0$ egyenesen levő pontokkal nem kell foglalkozni, itt nincs is metszéspont). A keresett érték ezek után Bézout tételéből adódik.

Projektív beágyazások és kanonikus görbék. Most azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy ha adott egy $|D|$ fixpontmentes teljes lineáris rendszer az X nemszinguláris görbén, milyen esetben lesz a hozzá tartozó $\phi : X \to \mathbf{P}^n(k)$ morfizmus beágyazás. Csak elégséges feltételekre szorítkozunk.

5.6. Lemma. *Ha minden $P \in X$ mellett a $|D-P|$ teljes lineáris rendszer is fixpontmentes, akkor $\phi(X) \subset \mathbf{P}^n(k)$ is nemszinguláris görbe, és ϕ izomorfizmus.*

Bizonyítás. Tetszőleges P, Q pontokra $|D-P|$ fixpontmentessége miatt van olyan $D' \in |D-P|$ divizor, amelynek felírásában Q nem szerepel. Tudjuk, hogy a $|D|$-beli divizorok éppen $\phi(X)$ hipersíkokkal vett metszetdivizorainak teljes inverz képei. Így $D' + P$-nek is megfelel egy hipersík, amelyen $\phi(P)$ rajta van, de $\phi(Q)$ nincs, ϕ tehát injektív. Most már elég $\phi(X)$ nemszingularitását látni. Tetszőleges $P \in X$ pont mellett a $\phi^* : K(\phi(X)) \to K(X)$ leképezés a $\phi(P)$-beli lokális gyűrű $M_{\phi(P)}$ maximális ideáljának elemeit a P-beli M_P maximális ideálba viszi, s ezáltal indukál egy $\bar{\phi} : M_{\phi(P)}/M^2_{\phi(P)} \to M_P/M_P^2$ k-vektortérhomomorfizmust. A 4.4 tétel bizonyítása alapján azt kell megmutatnunk, hogy $M_{\phi(P)}/M^2_{\phi(P)}$ egydimenziós. Minthogy a képtérről ezt tudjuk, csak azt kell látni, hogy $\bar{\phi} \neq 0$. Ellenkező esetben minden $f \in M_{\phi(P)}$-re $\phi^* f$ divizorában P legalább 2 multiplicitással szerepelne. De láttuk, hogy minden P-n átmenő hipersík meghatároz egy $M_{\phi(P)}$-beli racionális függvényt, következésképpen $|D-P| \subseteqq |D-2P|$, ami ellentmond $|D-P|$ fixpontmentességének.

5.7. Állítás. *Legyen* $\deg D \geqq 1$. *Az alábbi két esetben a $|D|$ teljes lineáris rendszer fixpontmentes lesz, és izomorf beágyazást határoz meg a $\mathbf{P}^{\dim L(D)-1}(k)$ projektív térbe.*

(1) $\deg D > 2g$; *vagy*

(2) *D kanonikus divizor, és nincs olyan $f \in K(X)$, amelyre $|K(X) : k(f)| = 2$.*

A (2) esetben kapott $\mathbf{P}^{g-1}(k)$-beli $2g-2$-edfokú görbéket kanonikus görbéknek nevezzük.

Bizonyítás. Csak az előző lemma kritériumát kell ellenőrizni. Ha az (1) esetben P fixpontja volna $|D|$-nek, akkor $L(D) = L(D-P)$ teljesülne, ami nem lehet, mert a Riemann–Roch-tétel (3) következménye miatt $L(D) \setminus L(D-P)$ egydimenziós, tehát nem üres. Hasonlóan látható $|D-P|$ fixpontmentessége is. Legyen most

$D = K$ kanonikus divizor. Ha $|K|$ nem volna fixpontmentes, felírva a P egyetlen pontból álló divizorra a Riemann–Roch-formulát, a $\dim L(K-P) = \dim L(K) = g$ egyenlőségből $\dim L(P) = 2$ adódna, vagyis a konstansokon kívül volna olyan függvény is $L(P)$-ben, amelynek pólusdivizora P. De akkor a 3.3 Tétel miatt ez a függvény biracionális izomorfiát indukálna a projektív egyenessel, ami nem lehet, mert a $\deg K \geqq 1$ feltétel miatt a nem legalább 2. Ugyanígy látható, hogy ha $|K - P|$ nem volna fixpontmentes, akkor olyan függvénynek kellene léteznie a görbén, amelynek a pólusdivizora 2 fokú (az elsőfokú esetet már kizártuk), ami a 3.3 Tétel alapján a (2)-beli feltevésnek mond ellent.

Az 5.2 Állítás következtében egy $X \subset \mathbf{P}^{g-1}(k)$ nemszinguláris görbe pontosan akkor kanonikus görbe, ha a foka $2g-2$ és a neme g. Például a negyedfokú nemszinguláris projektív síkgörbék ilyenek (vö. az előző Példával).

A kanonikus beágyazás a Riemann–Roch-tétel geometriai tartalmára is fényt derít. Ha $P \in X$ tetszőleges pont, a $\phi(P) \in \phi(X)$ pont pontosan akkor van rajta az $F = 0$ hipersíkon, ha a $\phi^{-1}(F, X)$ kanonikus divizorra $\phi^{-1}(F, X) \geqq P$. E megjegyzés általánosításaként rendeljük hozzá tetszőleges $D \in \mathrm{Div}(X)$-hoz azt a $< \phi(D) >$ projektív alteret, amely a $\phi^{-1}(F, X) \geqq D$ feltételt teljesítő $F = 0$ hipersíkok metszeteként áll elő. Könnyen látható, hogy $< \phi(D) >$ a $|K|$ teljes lineáris rendszer projektív struktúrájában éppen azzal az altérrel izomorf, amely az $L(K)$ vektortér $L(K - D)$ alteréből származik. Következésképpen $< \phi(D) >$ dimenziója $g - 1 - \dim L(K - D)$-vel egyenlő, amit a Riemann–Roch-formulába beírva $\dim < \phi(D) >= \deg D - \dim L(D)$ adódik. Hogy ez szemléletesen mit jelent, rögtön kiderül abból a speciális esetből, amikor $D = P_1 + \ldots + P_n$ valamilyen $P_i \in X$ pontokra. Világos, hogy ekkor $< \phi(D) >$ éppen a $\phi(P_i)$ pontok által generált projektív altér lesz, és az iménti formula ezen altér dimenzióját határozza meg. A Riemann–Roch-tétel ebben a verziójában tehát azt mutatja meg, hogy a kanonikus görbe pontjai milyen „szabadsági fokokkal" rendelkeznek.

A téma lezárásaként vessünk egy pillantást azokra az esetekre, amikor nem értelmeztük a kanonikus beágyazást. Ha $g = 0$, az 5.7 Állítás első része szerint bármely $P \in X$-re a $|P|$ teljes lineáris rendszer izomorfizmust határoz meg a projektív egyenessel, hiszen a Riemann–Roch-tétel (3) következménye miatt $\dim L(P) = 2$. $g = 1$ esetén a $|3P|$ teljes lineáris rendszert érdemes tekinteni, és az előző esettel teljesen analóg módon adódik, hogy a hozzá tartozó beágyazásnál harmadfokú nemszinguláris projektív síkgörbét kapunk. Amikor az alaptest karakterisztikája nem 2, megmutatható, hogy a képgörbe Legendre-féle alakra hozható (l. a Példát az előző fejezet végén). Végül — ugyancsak a $\mathrm{char}\, k \neq 2$ feltevés mellett — ha az 5.7 Állítás (2) pontjában kizárt esetről, azaz ún. *hiperelliptikus* görbéről van szó (könnyen meggondolható, hogy $g = 2$ mellett mindig ez a helyzet), akkor a görbe függvényteste másodfokú bővítése a projektív egyenesének, tehát $k(x, y)$ alakú, ahol $y^2 = f(x)$, és feltehető, hogy f polinom, amelynek csak egyszeres gyökei vannak. A Hurwitz-formulából adódik, hogy az elágazási pontok száma $2g + 2$, amiből levezethető, hogy f foka csak $2g+1$ vagy $2g+2$ lehet, a végtelenbeli pólushely multiplicitásától függően. A kidolgozást az olvasóra bízzuk.

A szingularitások feloldása. Utolsó alkalmazásként megmutatjuk, hogyan vezethető le a Riemann–Roch-tételből az a már sokszor emlegetett tény, hogy bármely projektív görbe biracionálisan izomorf egy nemszinguláris projektív görbével. Mint már a 2. fejezetben jeleztük, ehhez elég annyit megmutatni, hogy minden absztrakt Riemann-felület egy nemszinguláris projektív görbe Riemann-felülete. Projektív beágyazásokat görbékre már tudunk konstruálni az 5.7 Állítás segítségével, így, figyelembe véve, hogy a Riemann–Roch-tétel bizonyítása csak a Riemann-felülettől fog függeni, tulajdonképpen nincs más dolgunk, mint értelmezni a Riemann-felület morfizmusait a $\mathbf{P}^n(k)$ projektív terekbe. De vegyük észre, hogy a régi definíciónk megteszi: a racionális leképezést reprezentáló $(f_0, \ldots, f_n)$ $(n+1)$-es elemeit a függvénytestből vettük, a reguláris folytathatóságon alapuló megjegyzéseink pedig (tehát az is, hogy nemszinguláris görbe minden racionális leképezése morfizmus) mind csak azt használták ki, hogy a *képtér* projektív. Így a lineáris rendszerhez tartozó morfizmusok pontosan ugyanúgy vezethetők be, mint görbékre, és a bizonyítás teljessé tételéhez már csak egyetlen megjegyzés hiányzik: nevezetesen az, hogy az 1.2 Tétel nem bizonyított állítása érvényben marad ilyen morfizmusokra is, vagyis a Riemann-felület képe a beágyazásnál valóban projektív zárt halmaz lesz. De mint már szintén elmondtuk, ez a tétel sokkal általánosabb körülmények között, ún. teljes varietásokra is igaz, a bizonyítás pedig nem túlzottan bonyolult (a dolog neheze tényleg a nemszingularitás biztosítása). L. erről az 1. fejezet Jegyzeteiben szereplő referenciákat.

Jegyzetek. A síkgörbék szingularitásainak feloldhatósága a komplex esetben régesrég ismert. A klasszikus projektív geometriai bizonyítás (l. pl. Kollár [13]) explicit konstrukciókkal dolgozik, így nincs szükség az 1.2 Tételre. Az az általános probléma viszont, hogy minden varietáshoz létezik-e vele biracionálisan izomorf nemszinguláris varietás, az algebrai geometria egyik központi kérdése. Hironaka a 60-as években megmutatta, hogy 0 karakterisztikában a válasz igenlő. A bizonyítás több mint 200 oldal, egy speciális esetben viszont fogalmat alkothatunk a technikákról Mumford [17] könyvének 8. fejezetéből. $p > 0$ karakterisztikában a kérdés a mai napig nincs teljesen tisztázva.

Lineáris rendszerekről, kanonikus görbékről és a görbék geometriájának sok más kérdéséről szól Arbarello-Cornalba-Griffiths-Harris [1] munkája.

6. Egy kévényi kohomológia

Kévék. Legyen X tetszőleges topologikus tér. Egy X-en értelmezett $\mathcal{F}$ *kévén* a következőt értjük:

Minden U nyílt halmazhoz hozzárendelünk egy $\mathcal{F}(U)$ Abel-csoportot, $V \subset U$ esetén pedig az $\mathcal{F}(U)$ és $\mathcal{F}(V)$ Abel-csoportok között ρ_{UV} ún. megszorítási homomorfizmusokat értelmezünk az alábbi tulajdonságokkal:

(a) $$\mathcal{F}(\emptyset) = 0,$$

(b) $\rho_{UU} : \mathcal{F}(U) \to F(U)$ identikus leképezés,

(c) $W \subset V \subset U$ esetén $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

A ρ_{UV} megszorítási homomorfizmusra, ha félreértést nem okoz, a kényelmesebb $|_V$ jelölést használjuk. $\mathcal{F}(U)$ elemeit az $\mathcal{F}$ kéve U feletti *metszeteinek* szokás nevezni, $\mathcal{F}(X)$ elemeit pedig *globális metszeteknek*. Ez eddig egy ún. előkéve, kévét akkor kapunk, ha még két axióma is teljesül:

(1) Ha V_i $(i \in I)$ az U nyílt halmaz egy nyílt fedése, és az $s \in \mathcal{F}(U)$ metszetre $s\,|_{V_i} = 0$ minden i-re, akkor $s = 0$;

(2) Ha V_i $(i \in I)$ az U nyílt fedése, és adottak $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ metszetek úgy, hogy $s_i\,|_{V_i \cap V_j} = s_j\,|_{V_i \cap V_j}$ minden i, j indexpárra, akkor létezik (az (1) axióma szerint egyetlen) $s \in \mathcal{F}(U)$ metszet, amelyre $s\,|_{V_i} = s_i$ minden i-re.

Kévére a számunkra legfontosabb példát természetesen az algebrai varietásokon értelmezett racionális függvények szolgáltatják. Ez a kéve — az X varietás *struktúrakévéje*, amelyet $\mathcal{O}_X$-szel jelölünk — definíció szerint az U nyílt halmazhoz a rajta reguláris racionális függvények Abel-csoportját rendeli. Vegyük észre, hogy az $\mathcal{O}_X(U)$ Abel-csoportok természetes módon k-algebrák is. De ugyanígy kévét alkotnak valamely topologikus tér valós értékű folytonos függvényei vagy egy komplex analitikus sokaság nyílt részein analitikus, illetve meromorf függvények is.

A varietások lokális gyűrűinek kévékre vonatkozó általánosítása a *kocsány* fogalma: az $\mathcal{F}$ kévének a P pont feletti $\mathcal{F}_P$ kocsánya (U, s) alakú párokból áll, ahol U P-t tartalmazó nyílt halmaz és $s \in \mathcal{F}(U)$, továbbá az (U, s) és (V, t) párokat azonosítjuk, ha létezik $W \subset U \cap V$ P-t tartalmazó nyílt halmaz, amelyre $s\,|_W = t\,|_W$. A kocsány elemei természetes módon alkotnak Abel-csoportot, és ha az $\mathcal{F}(U)$-kon egyéb (pl. gyűrű-) struktúra is volt, az is nyilvánvalóan öröklődik. Fennköltebben fogalmazva, az $\mathcal{F}_P$ kocsány nem más, mint az $\{(\mathcal{F}(U), \rho_{UV}) : P \in U\}$ Abel-csoportokból álló direkt rendszer direkt limesze. Varietásokon a struktúrakéve $\mathcal{O}_{X,P}$ kocsányai tényleg a lokális gyűrűk, amiről a topologikus irreducibilitás alapján tüstént meggyőződhetünk.

Példák. (1) *Konstans kéve.* Vegyünk egy tetszőleges A Abel-csoportot, és lássuk el a diszkrét topológiával. Az X topologikus téren értelmezett (A-hoz tartozó) $\mathcal{A}$ konstans kéve az U nyílt részhalmazhoz az $U \to A$ folytonos leképezések Abel-csoportját rendeli. Az elnevezés azért indokolt, mert összefüggő U esetén $\mathcal{A}(U)$ csak a konstans függvényekből áll, vagyis izomorf A-val mint Abel-csoport, továbbá minden pontban a kocsány is A-val izomorf. (Ha U nem összefüggő, akkor $\mathcal{K}(U)$ A-nak az U nyílt komponensei szerint indexelt direkt hatványa lesz.) Nekünk a legfontosabb egy X absztrakt Riemann-felület felett a $K(X)$ függvénytesthez tartozó konstans kéve lesz, amely — hogy tautológiával éljünk — megegyezik az X-en meromorf racionális függvények kévéjével.

(2) *Felhőkarcoló.* Legyen P rögzített pontja az X topologikus térnek, A adott Abel-csoport, és definiáljuk az $\mathcal{A}^P$ kévét úgy, hogy $\mathcal{A}^P(U) = A$, ha $P \in U$, különben

pedig 0. A megszorítások triviálisan értelmezhetők, és az is látszik, hogy a P pont X-beli lezártjának pontjai fölött a kocsány A, egyébként pedig 0. Tehát ez a kéve is rászolgált a nevére.

(3) *Divizorokhoz tartozó kévék.* Ha D rögzített divizor az X projektív görbén vagy absztrakt Riemann-felületen, értelmezzük a $\mathcal{L}(D)$ kévét a következő módon: ha U nyílt halmaz, álljon $\mathcal{L}(D)(U)$ mindazon $f \in O_X(U)$ racionális függvényekből, amelyekre $v_P(f) + v_P(D) \geqq 0$ teljesül minden $P \in U$ pontra. Nyilvánvalóan $\mathcal{L}(D)(X) = L(D)$. Ez a kéve részkévéje annak a konstans kévének, amely minden Zariski-nyílt halmazhoz a $K(X)$ függvénytestet rendeli.

(4) *Differenciálformák kévéi.* A továbbiakban $\otimes$-val fogjuk jelölni azt a kévét, amely az X absztrakt Riemann-felület egy U nyílt halmazához a rajta reguláris differenciálformákat rendeli. A (3) Példa mintájára pedig bevezethetjük tetszőleges $D \in \mathrm{Div}(X)$ mellett az $\otimes(D)$ kévét, amelynek metszetei az U halmaz felett a $v_P(\omega) + v_P(D) \geqq 0 \quad (P \in U)$ egyenlőtlenséget teljesítő differenciálformák.

Az utóbbi két példa közös vonása, hogy bármely U nyílt halmazra az $\mathcal{L}(D)(U)$ és $\otimes(D)(U)$ Abel-csoportok természetes módon modulussá tehetők az $O_X(U)$ gyűrű felett (és így a kocsányok $O_{X,P}$-modulusok). $V \subset U$ esetén a megszorítási homomorfizmusok is tekinthetők modulushomomorfizmusnak, ha $O_X(U)$ az $O_X(U) \to O_X(V)$ gyűrűhomomorfizmus útján hat a V feletti metszeteken. Jogos tehát, ha azt mondjuk, hogy a szóban forgó kévék O_X*-modulusok*.

Kévekötés és egzakt sorozatok. Ha $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ két kéve (vagy előkéve) ugyanazon a topologikus téren, egy $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *(elő)kévehomomorfizmuson* $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ Abel-csoport-(gyűrű-, stb.)homomorfizmusok összességét értjük, amely kompatibilis a megszorítási homomorfizmusokkal, vagyis bármely $V \subset U$ nyílt halmazok esetén $(\phi_U \mathcal{F}(U)) |_V = \phi_V(\mathcal{F}(U) |_V)$. ϕ izomorfizmus, ha létezik kétoldali inverze. Természetes módon értelmezhetjük O_X-modulusok homomorfizmusait, illetve izomorfizmusait is.

Példa. Ha D és D' ekvivalens divizorok az X absztrakt Riemann-felületen, akkor az $\mathcal{L}(D)$ és $\mathcal{L}(D')$ kévék izomorfak. Speciálisan az (f) függvénydivizorra $\mathcal{L}\big((f)\big)$ izomorf az O_X struktúrakévével. Legyen ugyanis $D' = D + (f)$, ekkor a $g \mapsto fg$ leképezés minden U nyílt halmazon megad egy $\mathcal{L}(D)(U) \to \mathcal{L}(D')(U)$ csoportizomorfizmust, ami könnyen láthatóan kompatibilis a megszorításokkal, tehát kéve-, sőt O_X-modulusizomorfizmust kaptunk. Az inverzet $g \mapsto g/f$ szolgáltatja.

A fentiek alapján azt gondolhatnánk, hogy egy ϕ kévehomomorfizmus magjának, illetve képének az értelmezése is természetes módon történhet, vagyis úgy, hogy vesszük az egyes ϕ_U homomorfizmusok magjait és képeit, ellátva őket az indukált megszorítási homomorfizmusokkal. A gond csak az, hogy míg a magok esetében láthatóan teljesülnek a kéveaxiómák, a képek esetében általában nem. Ezt a csorbát köszörüli ki az alábbi „kévekötési" konstrukció.

Legyen $\mathcal{F}$ előkéve, és definiáljuk az $\mathcal{F}$-hez tartozó $\mathcal{F}^\sharp$ kévét a következőképpen: az U nyílt halmaz felett $\mathcal{F}^\sharp$ metszetei legyenek olyan $s : U \to \bigcup_{P \in U} \mathcal{F}_P$ függvények, amelyekre minden $P \in U$ pont mellett teljesül (a) $s(P) \in \mathcal{F}_P$, ezen kívül (b) létezik P-nek olyan $V \subset U$ nyílt környezete, és $t \in \mathcal{F}(V)$ metszet, amelyre minden $Q \in V$ pont esetén t-nek az $\mathcal{F}_Q$ kocsányban vett t_Q képe éppen $s(Q)$. Könnyen látható, hogy $\mathcal{F}^\sharp$ tényleg kéve, továbbá az a természetes leképezés, amely egy $s \in \mathcal{F}(U)$ metszethez azt a függvényt rendeli, amelynek az értéke $P \in U$-ban $s_P \in \mathcal{F}_P$, előkévehomomorfizmus, amely pontosan akkor bijektív, ha $\mathcal{F}$ maga is kéve. Másfelől a (b) tulajdonság mutatja, hogy $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}^\sharp$ kocsányai megegyeznek.

Most már értelmezhetjük egy egy $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ kévehomomorfizmus $\operatorname{Im} \phi$ képét mint az $U \mapsto \operatorname{Im} \phi_U$ előkévehoz tartozó kévét. Ugyanígy, ha $\mathcal{G}$ *részkévéje* $\mathcal{F}$-nek (vagyis kéve, és minden U-ra $\mathcal{G}(U)$ részcsoportja $\mathcal{F}(U)$-nak), az $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ *faktorkévét* az $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ előkévéhez tartozó kéveként definiáljuk. Mondhatjuk azt is, hogy a $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{G} \to 0$ sorozat egzakt. Általában akkor nevezünk egy $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ sorozatot *egzakt*nak, ha $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \phi$. Mivel azonban az $\operatorname{Im} \phi$ kéve elég nehezen áttekinthető, inkább azt a definíciót fogjuk használni, amely szerint a sorozat akkor egzakt, ha minden P pontra a kocsányokon indukált $\mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P \to \mathcal{H}_P$ sorozat egzakt mint Abel-csoportok (gyűrűk, vektorterek, stb.) sorozata. Az eddigiek alapján könnyen meggondolható, hogy a két definíció ekvivalens. (Elég ui. belátni, hogy egy kévehomomorfizmus pontosan akkor izomorfizmus, ha a kocsányokon izomorfizmust indukál, amit nem nehéz levezetni a kéveaxiómákból.) Ily módon már beszélhetünk kévék közti injektív, illetve szürjektív homomorfizmusokról, és mindeme fogalmaknak megvan az $\mathcal{O}_X$-modulusokra vonatkozó megfelelője is.

Čech-kohomológia. Tekintsük az X topologikus tér egy $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ nyílt fedését. Az $\mathcal{U}$ fedéshez és az $\mathcal{F}$ kévéhez tartozó *Čech-komplexus* definíció szerint egy

$$C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \dots$$

Abel-csoporthomomorfizmusokból álló sorozat, ahol a

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\{i_0, i_1, \dots, i_q\} \subset I} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q})$$

Abel-csoport elemeit *q-kolánc*oknak mondjuk, és a $\partial_q : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ homomorfizmust a

$$(\partial_q \alpha)_{i_0, \dots, i_{q+1}} = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \alpha_{i_0, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_{q+1}} |_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{q+1}}}$$

képlettel értelmezzük, ahol pl. $\alpha_{i_0, \dots, i_q}$ jelöli az α q-koláncnak a megfelelő indexű komponensét, amely tehát egy $\mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q})$-beli metszet. Könnyen ellenőrizhető, hogy $q \geqq 0$-ra $\partial_{q+1} \partial_q = 0$, az e tulajdonsággal rendelkező sorozatokat nevezik a homologikus algebrában komplexusoknak. $q \geqq 0$-ra tehát értelmes a

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \text{ ahol } Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Ker} \partial_q \text{ és } B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Im} \partial_{q-1}$$

definíció. (Itt megállapodunk abban, hogy $\operatorname{Im}\partial_{-1} = 0$.) Ezt a csoportot nevezzük az $\mathcal{F}$ kéve $\mathcal{U}$-hoz tartozó *q-adik (Čech-)kohomológiacsoportjának*. $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ elemei a *q-kociklusok*, $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$-éi pedig a *q-kohatárok*.

Kényelmi szempontokból érdemes a koláncok definíciójában az indexelést I^{q+1} minden elemére kiterjeszteni. E célból tekintsük az $\alpha_{i_0,\dots,i_q}$ komponenst 0-nak, ha két index megegyezik, továbbá fixáljuk I egy $\prec$ jólrendezését, és definiáljuk a kiterjesztést úgy, hogy ha σ az $(i_0 \prec \dots \prec i_q)$ indexhalmaz egy permutációja, akkor $\alpha_{\sigma(i_0),\dots,\sigma(i_q)} = (-1)^{I(\sigma)}\alpha_{i_0,\dots,i_q}$ legyen, ahol $I(\sigma)$ a σ inverzióinak száma. A ∂_q homomorfizmusokat ugyanazzal a formulával definiálva könnyen látható, hogy a sorozat komplexus marad.

Nekünk igazából csak az első két kohomológiacsoportra lesz szükségünk, nézzük hát először a nulladikat. Egy 0-kolánc nem más, mint egy $\{s_i \in \mathcal{F}(U_i) : i \in I\}$ metszetsorozat, amely pontosan akkor van $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$-ben, ha $s_i - s_j = 0$ minden i, j indexpárra. De ez a (2) kéveaxióma miatt azt jelenti, hogy az s_i metszetek egy s globális metszetté állnak össze, vagyis tetszőleges $\mathcal{U}$ fedés esetén $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$. Rátérve a $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ kohomológiacsoportra, az 1-kociklusokat olyan $s_{ij} \in U_i \cap U_j$ metszetek reprezentálják (minden i, j indexen végigfutva), amelyekre $s_{ik} = s_{ij} + s_{jk}$ az $U_i \cap U_j \cap U_k$ metszeten, a kohatárok pedig, amelyekkel lefaktorizálunk, olyan kociklusok, amelyekhez létezik $\{t_i \in \mathcal{F}(U_i) : i \in I\}$ 0-kolánc, amelyre $t_i - t_j = s_{ij}$ az $U_i \cap U_j$ halmazon. Itt már nem adhatunk olyan $\mathcal{U}$-tól független jellemzést, mint H^0 esetében, ezért a $H^1(X, \mathcal{F})$ kohomológiacsoportot úgy fogjuk definiálni, hogy egyre finomabb fedéseket veszünk, és a kapott kohomológiacsoportok limeszét képezzük.

A $\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$ fedést *finomabbnak* mondjuk $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$-nél, ha minden $V_j \in \mathcal{V}$-hez létezik $U_i \in \mathcal{U}$, amelyre $V_j \subset U_i$. Van tehát az indexhalmazokon egy (nem egyértelmű) $\tau : J \to I$ függvény, amelyre $V_j \subset U_{\tau(j)}$ minden j-re. (Vegyük észre, hogy ez a definíció csak első pillantásra felel meg a finomításról alkotott intuitív képünknek. Ha például egy fedésből bizonyos elemeket elhagyunk, az így kapott fedés nem durvább, hanem finomabb lesz!) Definiáljuk most a $\tau^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ leképezést úgy, hogy az $\{s_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) : i, j \in I\}$ metszetekkel reprezentált kociklust az $\{s_{\tau k, \tau l}|_{V_k \cap V_l} \in \mathcal{F}(V_k \cap V_l) : k, l \in J\}$ metszetekkel reprezentáltba vigye. $\tau^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$ kohatárokat kohatárokba visz, tehát indukál egy $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ homomorfizmust. Ez a csoporthomomorfizmus már nem függ a $\tau : J \to I$ leképezés megválasztásától. A kociklustulajdonság egyszerű következménye ugyanis, hogy ha $\tau, \tau' : J \to I$ leképezések, akkor a $V_k \cap V_l$ halmazon

$$s_{\tau k, \tau l} - s_{\tau' k, \tau' l} = s_{\tau k, \tau l} + s_{\tau l, \tau' k} - s_{\tau l, \tau' k} - s_{\tau' k, \tau' l} = s_{\tau k, \tau' k} - s_{\tau l, \tau' l}.$$

Itt $V_k \subset U_{\tau k} \cap U_{\tau' k}$, tehát $s_{\tau k, \tau' k} \in \mathcal{F}(U_{\tau k} \cap U_{\tau' k})$ megszorítható V_k-ra is (és hasonlóan l-re), vagyis a két kociklus egyazon mellékosztályban van. Most már definiálhatjuk a $H^1(X, \mathcal{F})$ kohomológiacsoportot mint a $\{(H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \tau^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}) : \mathcal{U} \text{ nyílt fedés}\}$ Abel-csoportokból álló direkt rendszer direkt limeszét. Ez magyarul azt jelenti, hogy vesszük a $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ Abel-csoportok diszjunkt unióját, és az $\alpha \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ és $\beta \in H^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ elemeket ekvivalenseknek tekintjük, ha létezik $\mathcal{W}$ $\mathcal{U}$-nál és $\mathcal{V}$-nél is finomabb fedés, amelyre $\tau^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}(\alpha) = \tau^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(\beta)$, valamint a műveleteket is egy ilyen közös finomabb fedéshez tartozó kohomológiacsoporton végezzük. Ha X kompakt, akkor elég a *véges* nyílt fedésekhez tartozó kohomológiacsoportokra képezni a direkt limeszt, mert minden nyílt fedésnek van véges részfedése, amely definíció szerint finomabb. A magasabb kohomológiacsoportokat hasonlóan definiálják, de azokra nem lesz szükségünk.

Mindenfajta kohomológia alapvető tulajdonsága a következő.

6.1. Állítás (egzakt kohomológiasorozat). *Legyen $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$ kévék egzakt sorozata az X topologikus téren. Ekkor létezik egy*

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X,\mathcal{G}) \to H^0(X,\mathcal{H}) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H})$$

egzakt sorozat is.

Bizonyítás. Miután az eddigiek alapján $H^0(X,\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$ (és hasonlóan $\mathcal{G}$-re, $\mathcal{H}$-ra), az első három homomorfizmus adva van, az egzaktság pedig egyszerűen következik a kéveaxiómákból. Például $H^0(X,\mathcal{F})$-nél azért egzakt a sorozat, mert ha $s \in \mathcal{F}(X)$ olyan globális metszet, amelyre $\phi_X(s) = 0$, akkor a kocsányokon indukált homomorfizmusok injektivitásából következően minden $x \in X$ pontnak van olyan U környezete, amelyen $s\,|_U = 0$. De akkor az (1) kéveaxióma miatt $s = 0$. Jegyezzük meg, hogy ez a meggondolás X helyett bármely $U \subset X$ nyílt halmazra is ugyanúgy igaz (mint ahogy az egész $0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X)$ sorozat egzaktsága is). Hasonló módon pl. a $\operatorname{Ker}\psi_X \subset \operatorname{Im}\phi_X$ tartalmazás abból következik, hogy ha s $\mathcal{G}$ globális metszete, amelyre $\psi(s)=0$, a kocsányokon való egzaktságból következően létezik X-nek olyan $\mathcal{U}$ nyílt fedése, amelynek minden U_i elemén $s = \phi(t_i)$ valamely $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$-re. Ám ekkor az $U_i \cap U_j$ metszeteken $\phi(t_i - t_j) = 0$, ami a fentiek szerint csak $t_i\,|_{U_i \cap U_j} = t_j\,|_{U_i \cap U_j}$-re lehet, és a (2) kéveaxióma szolgáltatja a kívánt globális metszetet.

Következő dolgunk a $\partial^* : H^0(X,\mathcal{H}) \to H^1(X,\mathcal{F})$ összekötő homomorfizmus értelmezése. Ha $s \in \mathcal{H}(X)$ globális metszet, ψ szürjektivitása miatt az előbbiekhez hasonlóan létezik X-nek olyan $\mathcal{U}$ nyílt fedése, és $(t_i) \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{G})$ 0-kolánc, amelyre $\psi(t_i) = s$ az U_i halmazon. De akkor megint csak úgy, mint az előbb, $\psi(t_i - t_j) = 0$ $U_i \cap U_j$-n, és a sorozat első három tagjánál vett egzaktságot X helyett $U_i \cap U_j$-re alkalmazva kapjuk, hogy létezik $u_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$, amelyre $\phi(u_{ij}) = t_i - t_j$, amiből ϕ injektivitását felhasználva adódik, hogy az u_{ij}-k egy $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$-beli kociklussá állnak össze. Meggyőződhetünk róla, hogy különböző reprezentánsok választása esetén a kapott kociklusok csak kohatárban térnek el, és különböző fedések esetén is a $H^1(X,\mathcal{F})$ kohomológiacsoport ugyanazon elemére fognak képződni. Ezzel ∂^*-ot definiáltuk, a hátramaradó két leképezés pedig már természetes módon definiálható. Az egzaktságok ellenőrzése az iméntiekhez hasonló rutinszámolás, amelyet nem részletezünk. Általános elv, hogy az egzaktságot elég a reprezentáló fedéseken ellenőrizni, mert a direkt limesz megőrzi az egzakt sorozatokat.

Kohomológiával kapcsolatban még egy állítás, amelyre többször lesz szükségünk.

6.2. Lemma. *Legyen M vektortér a k test felett, $\mathcal{M}$ pedig a hozzá tartozó konstans kéve egy X kompakt, irreducibilis topologikus téren. Ekkor $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$.*

Bizonyítás. Mivel X kompakt, elég tetszőleges $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ véges fedésről kimutatni, hogy $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M})=0$. Tekintsük az $(s_{ij}) \in Z(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ kociklust, és definiáljuk a $t_i \in \mathcal{M}(U_i)$ metszeteket a

$$t_i = \begin{cases} (1/n)(s_{i1} + s_{i2} + \ldots s_{in}), & \text{ha char } k \nmid n, \\ (1/(n+1))(2s_{i1} + s_{i2} + \ldots s_{in}), & \text{ha char } k \mid n \end{cases}$$

formulával. (Itt használjuk, hogy minden s_{ij} egyértelműen terjed ki U_i-re, továbbá támaszkodunk az $s_{ij} = -s_{ji}$ és $s_{ii} = 0$ kociklustulajdonságokra.) X irreducibilitása folytán az $U_i \cap U_j \cap U_k$ metszetek egyetlen (i, j, k) hármasra sem üresek, tehát mindig felírható az $s_{ij} + s_{jk} = s_{ik}$ kociklusazonosság, amiből azonnal adódik, hogy $t_i - t_j = s_{ij}$ minden indexpárra, és ezt kellett bizonyítanunk.

A Riemann–Roch-tétel kohomologikus alakja. Ennyi előkészület után rátérhetünk a Riemann–Roch-tétel bizonyítására. Mindennek az alapja a következő

6.3. Tétel. *Az X absztrakt Riemann-felület O_X struktúrakévéjére $H^1(X, O_X)$ véges dimenziós k-vektortér.*

Ezt a tételt egy kicsit később fogjuk bizonyítani. Most viszont már jöhet a nagy

6.4. Tétel (kohomologikus Riemann–Roch-formula). *Legyen D tetszőleges divizor az X absztrakt Riemann-felületen. Ekkor* a (3) *példa jelölésével*

$$\dim H^0(X, \mathcal{L}(D)) - \dim H^1(X, \mathcal{L}(D)) = \deg D - g + 1,$$

ahol $g = \dim H^1(X, O_X)$.

A formula baloldalát az $\mathcal{L}(D)$ kéve *Euler-karakterisztikájának* nevezzük. Az 5. fejezetben kimondott klasszikus Riemann–Roch-tétel azonnal következik a fenti tételből és a következő fejezetben bizonyítandó alábbiból:

6.5. Tétel (Serre-dualitás). *A $H^1(X, \mathcal{L}(D))$ kohomológiacsoport mint k-vektortér izomorf a $H^0(X, \Omega(-D))$ tér duális terével, következésképp megegyezik a dimenziójuk.*

Vegyük észre, hogy $D = 0$-ra a Serre-dualitás azt mondja, hogy a 6.4 Tételben szereplő g egyenlő a görbe (Riemann-felület) nemével.

Bizonyítás a 6.4 Tételre. Lényegében a 3.1 Lemma bizonyításának gondolatmenetét általánosítjuk. Először is az állítás nyilvánvalóan igaz a 0 divizorra. Készen leszünk tehát, ha megmutatjuk, hogy az állítás pontosan akkor igaz a D divizorra, ha tetszőleges $P \in X$ mellett a $D+P$ divizorra igaz. Csak az egyik irányt igazoljuk, a másik ugyanúgy megy.

Nyilvánvalóan bármely U nyílt halmazra $\mathcal{L}(D)(U) \subset \mathcal{L}(D+P)(U)$. Vegyük azt az $\mathcal{L}^P$ felhőkarcolókévét, amelynek P feletti kocsánya $\big(\mathcal{L}(D+P)\big)_P / \big(\mathcal{L}(D)\big)_P$, a többi pont felett 0. Mivel az egypontú halmazok zártak, a definíció értelmes. Ugyanebből adódik, hogy a $0 \to \mathcal{L}(D) \to \mathcal{L}(D+P) \to \mathcal{L}^P \to 0$ sorozat egzakt, felírható tehát a

$$
\begin{aligned}
&0 \to \mathcal{L}(D)(X) \to \mathcal{L}(D+P)(X) \to \mathcal{L}^P(X) \to \\
&\qquad \to H^1(X, \mathcal{L}(D)) \to H^1(X, \mathcal{L}(D+P)) \to H^1(X, \mathcal{L}_P)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

egzakt kohomológiasorozat. A sorozat utolsó tagja azonban 0, hiszen X bármely nyílt fedéséhez létezik olyan finomabb fedés, amelynél a P pont csak egyrétűen van lefedve (tartsunk meg egy P-t tartalmazó nyílt halmazt, a többit metsszük el $X \setminus P$-vel), ám egy ilyen fedésnél az $U_i \cap U_j$ metszetek felett a felhőkarcoló 0, tehát minden kociklus eleve 0. Másfelől $\mathcal{L}^P(X)$ 1-dimenziós k-vektortér. Elegendő ugyanis az $\mathcal{L}^P$ definíciójában szereplő kocsány elemeit egy olyan nyílt halmaz felett vizsgálni, amely a $D + P$-ben $\neq 0$ együtthatókkal szereplő pontok közül csak P-t tartalmazza. Ha $v_P(D) = m$, és t lokális paraméter P-ben, $s \mapsto t^{m+1}s(P)$ szolgáltatja a kívánt $\mathcal{L}^P(X) \cong k$ vektortérizomorfizmust, figyelembe véve, hogy t^{-m-1} képe 1. A sorozatban szereplő vektorterek dimenzióit leszámlálva

$$\dim \mathcal{L}(D+P)(X) - \dim H^1\big(X, \mathcal{L}(D+P)\big) = \dim \mathcal{L}(D)(X) - \dim H^1\big(X, \mathcal{L}(D)\big) + 1$$

adódik. (Speciálisan az is kijön, hogy $H^1\big(X, \mathcal{L}(D+P)\big)$ véges dimenziós, amit eddig nem bizonyítottunk.) Minthogy ez az összefüggés a jobboldalakra nyilvánvalóan fennáll, a bizonyítás teljes.

Pihenésül megmutatjuk, hogyan vezethető le a 3.2 Állítás, amely szerint függvénydivizorok foka 0, a 6.4 Tételből. A kohomologikus Riemann–Roch-formula szerint ha $f \in K(X)$ tetszőleges racionális függvény,

$$\deg(f) = \dim H^0\big(X, \mathcal{L}((f))\big) - \dim H^1\big(X, \mathcal{L}((f))\big) + g - 1.$$

Másrészről láttuk, hogy $\mathcal{L}\big((f)\big)$ izomorf az $\mathcal{O}_X$ struktúrakévével. Erre a kévére viszont a jobboldal nyilvánvalóan 0, ami bizonyítja az állítást. Vegyük észre, hogy itt tulajdonképpen a 6.4 Tétel bizonyításának triviális első lépésén kívül semmit sem használtunk, még a 6.3 Tételt sem. A fejezet befejezéseképpen ez utóbbit bizonyítjuk.

Bizonyítás a 6.3 Tételre. Vegyük észre, hogy elég egyetlen D divizort találni, amelyre $H^1(X, \mathcal{L}(D))$ véges dimenziós, mert akkor a 6.4 Tétel bizonyítását a 0 divizor helyett D-vel kezdve véges sok lépés után $H^1(X, \mathcal{O}_X)$-hez is eljutunk. Válasszuk ehhez D-t úgy, hogy $\deg D - \dim L(D)$ maximális legyen. A 3.5 Lemma miatt ilyen D létezik. Megmutatjuk, hogy ekkor $H^1(X, \mathcal{L}(D))$ nemhogy véges dimenziós, de még 0 is. A 3.1 Lemma (1) Következményéből adódik, hogy a választott D-re $\deg(D+P) - \dim L(D+P) = \deg D - \dim L(D)$, és így az előző bizonyításban szereplő $\mathcal{L}^P$ kévére $\dim \mathcal{L}^P(X) = 1 = \dim L(D+P) - \dim L(D)$. Ezek szerint a (2) egzakt sorozatban az $L(D+P) = \mathcal{L}(D+P)(X) \to \mathcal{L}^P(X)$ homomorfizmus szürjektív, de akkor $H^1(X, \mathcal{L}(D)) = H^1(X, \mathcal{L}(D+P))$. Indukcióval kapjuk, hogy tetszőleges $D' \geqq D$ divizorra $H^1(X, \mathcal{L}(D)) = H^1(X, \mathcal{L}(D'))$ teljesül.

Elég tehát belátnunk, hogy ha kiválasztjuk $H^1(X, \mathcal{L}(D))$ egy elemét, amelyet valamely $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ nyílt fedésen az (s_{ij}) kociklus reprezentál, létezik olyan $D' \geqq D$ divizor, amelynél (s_{ij}) 0-ra képződik a $H^1(X, \mathcal{L}(D'))$ kohomológiacsoportban (amelynek mindenképpen eleme, hiszen $\mathcal{L}(D)$ részkévéje $\mathcal{L}(D')$-nek). $\mathcal{L}(D)$ azonban részkévéje a $K(X)$ konstans kévének is, amelyre a 6.2 Lemma szerint $H^1(X, K(X)) = 0$. Létezik tehát egy $\mathcal{U}$-nál finomabb $\mathcal{V} = \{V_k : k \in J\}$ fedés, $\tau : J \to I$ indexleképezés és $(t_k) \in C^0(\mathcal{V}, K(X))$ kolánc, amelyekre minden $k, l \in J$ esetén $s_{\tau k, \tau l}\,|_{V_k \cap V_l} = t_k - t_l$. X kompaktsága miatt feltehető, hogy J véges, és így választható olyan D' divizor, amely a divizorok közötti rendezésben mind D-nél, mind a t_k függvények pólusdivizorainál nagyobb. De ekkor $(t_k) \in C^0(\mathcal{V}, \mathcal{L}(D'))$, vagyis (s_{ij}) képe már $H^1(\mathcal{V}, \mathcal{L}(D'))$-ben, tehát $H^1(X, \mathcal{L}(D'))$-ben is 0.

Jegyzetek. A $H^1(X, \mathcal{L}(D))$ kohomológiacsoportok véges dimenziós volta az algebrai görbék alapvető tulajdonsága. De ez a tétel sokkal általánosabban is igaz. Serre híres dolgozatában, a FAC-ban [20] bebizonyította, hogy projektív varietásokon az összes kohomológiacsoport véges dimenziós minden *koherens* kévére, azaz olyan $\mathcal{O}_X$-modulusokra, amelyeknek minden P pontbeli kocsánya végesen generált $\mathcal{O}_{X,P}$-modulus, görbékre pedig az 1-nél magasabb kohomológiacsoportok már el is tűnnek. Nem sokkal később Grothendieck a [9] munkájában nagy mértékben általánosította Serre eredményeit. Tételeiből következik, hogy a végességi tétel a projektív beágyazástól függetlenül, teljes varietásokra is igaz, valamint hogy n-dimenziós varietásokon a koherens kévék kohomológiacsoportjai az $(n+1)$-edik indextől kezdve 0-k. Megemlítjük még, hogy a komplex test felett a 6.3 Tétel meglepő módon a funkcionálanalízis módszereivel bizonyítható; lásd erről Forster [5] és Gunning [10] könyveit.

A Riemann–Roch-tétel mai felfogásának alapja az a fent tárgyalt felismerés, hogy a tétel két összetevőből, a kohomologikus verzióból és a Serre-dualitásból áll össze. A magasabb dimenziós általánosítások *külön-külön* szólnak a két tételről: csak alacsony dimenzióban van olyan szerencsénk, hogy a két tétel összefoglalható egy közös formulában. A kohomologikus formula általánosításai Grothendieck fenti tételéből indulnak ki, amely lehetővé teszi, hogy általánosan definiáljuk pl. projektív varietásokon egy koherens kéve Euler-karakterisztikáját mint a kohomológiacsoportok dimenzióinak alternáló összegét. A probléma ezután az, hogy az Euler-karakterisztikát a varietás és a kéve invariánsainak a segítségével kifejezzük, úgy mint a 6.4 Tételben. A kérdéskörbe jó bevezetőt nyújtanak Zariski [28] és Hartshorne [12] munkái.

Megjegyezzük végül, hogy a 6.2 Lemma állítása általánosabban is igaz minden olyan kévére, amelynél a megszorítási homomorfizmusok szürjektívek (l. pl. Godement [8]). Az ilyen kévéket nevezik *kornyadt*nak (*flasque*).

7. Reziduumok és dualitás

A fejezetben mindvégig legyen X rögzített absztrakt Riemann-felület. Az O_X struktúrakéve P feletti kocsányát, amely nem más, mint maga a P diszkrét értékelésgyűrű, a könnyebb érthetőség kedvéért $O_{X,P}$-vel fogjuk jelölni, és úgy képzeljük, mint egy görbe lokális gyűrűjét. (Az is.)

Adélek. Kezdetnek megmutatjuk, milyen szoros kapcsolat van az első kohomológiacsoport és a Mittag–Leffler-típusú problémák között. (Valójában az elmélet születését is ilyen kérdések motiválták.) Legyen $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ az X egy fedése, és vegyük $\mathcal{U}$ felett a racionális függvények $K(X)$ konstans kévéjének egy olyan $\alpha = (s_i)$ koláncát, amelyre minden $U_i \cap U_j$ halmazon $s_i - s_j$ reguláris függvény. Kérdés, hogy mikor létezik olyan s globális metszet, amelyre $s - s_i\,|_{U_i} \in O_X(U_i)$ minden i-re.

Vegyük észre, hogy a probléma nagyon hasonló ahhoz, mintha adott pólusdivizorral rendelkező függvény létezésére kérdeznénk, csak itt többet kívánunk, mert előírjuk az $U_i \cap U_j$ halmaz pontjainak lokális paraméterei szerint vett Laurent-sorok farkát. Ez a feltevésünk másképpen azt jelenti, hogy az $\alpha \in C^0(\mathcal{U}, K(X))$ koláncra $\partial_0\alpha$ $Z^1(\mathcal{U}, O_X)$-ben is benne van. Ebből már könnyen látható, hogy a kívánt globális metszet pontosan akkor létezik, ha $\partial_0\alpha$ képe a $H^1(\mathcal{U}, O_X)$ kohomológiacsoportban (és így $H^1(X, O_X)$-ben is) 0. Ha ugyanis s a keresett globális metszet, az $\{(s - s_i) : i \in I\}$ $C^0(\mathcal{U}, O_X)$-beli kolánc ∂_0-képe éppen $\partial_0\alpha$ (persze itt két különböző ∂_0-ról van szó), a megfordítás pedig a (2) kéveaxióma folyománya.

Magától értetődően ugyanígy járhatunk el, ha az O_X struktúrakéve helyett az $\mathcal{L}(D)$ kévét vesszük valamely D divizor esetén. Mindezek alapján a $H^1(X, \mathcal{L}(D))$ kohomológiacsoportot a következőképpen képzelhetjük el. Vegyük minden P pontra valamely lokális paraméter szerint a formális Laurent-sorok testét. Ezek direkt szorzatából csak azon sorfejtés-sorozatokat tartsuk meg, amelyek potenciálisan globális függvény sorfejtései lehetnek, azaz csak véges sok pontban engedjünk meg negatív kitevőjű tagot. Ezek után minden pontra hagyjuk el a $-v_P(D)$ feletti kitevőjű tagokat, hiszen ezek a Mittag–Leffler-probléma szempontjából érdektelenek, végül pedig faktorizáljunk le azokkal a farkakkal, amelyek valóban globális függvényből származnak. A továbbiakban ezt az észrevételünket pontosítjuk.

Az 1. fejezetben láttuk, hogy az $O_{X,P}$ lokális gyűrű egy fix t lokális paraméter szerinti hatványsorfejtésnél beágyazódik a $k[[t]]$ formális hatványsorgyűrűbe. Jelöljük ezentúl ezt a hatványsorgyűrűt S_P-vel, a hányadostestét (amely a formális Laurent-sorokból áll) K_P-vel. Vegyük észre, hogy különböző t, t' lokális paraméterek esetén ugyanazt az S_P gyűrűt és K_P testet kapjuk, mert ha $t = ut'$ valamely u

egységgel, a t-ben vett sorfejtésekbe beírhatjuk ut' t' szerinti sorfejtését, ami egy konstanstag nélküli hatványsor, és viszont. Világos továbbá az is, hogy ha t lokális paraméter P-ben, tetszőleges m egész számra $K(X)/t^m O_{X,P} \cong K_P/t^m S_P$ (mert $K(X)$ és $t^m S_P$ generálják K_P-t), ami szintén t választásától független gyűrű.

Tekintsük most a $\prod_{P \in X} K_P$ direkt szorzatnak azt az $\mathcal{A}(X)$ k-részalgebráját, amelynek elemei olyan (a_P) sorozatok, amelyekben véges sok kivétellel minden a_P S_P-beli, vagyis reguláris P-ben. Az ilyen sorozatokat a számelméletben *adél*eknek szokás nevezni. Álljon továbbá tetszőleges D divizor mellett az $\mathcal{A}(D)(X)$ gyűrű azon (a_P) adélokból, amelyekre minden P pontban $v_P(a_P) + v_P(D) \geqq 0$ teljesül. $\mathcal{A}(0)(X)$ egyszerűen az S_P gyűrűk direkt szorzata, vezessük hát be rá az $\mathcal{S}(X)$ jelölést.

Mint a jelölések is sugallják, itt valójában bizonyos kévék globális metszeteiről van szó. Az adélgyűrűből ugyanis készíthetünk egy $\mathcal{A}$ kévét úgy, hogy az U nyílt halmaz feletti metszetek a globális metszetekből a sorozatok U-n kívüli komponenseinek elhagyásával keletkeznek, $\mathcal{A}(D)$ pedig $\mathcal{A}$-nak azon részkévéje, amely U felett a $v_P(a_P) + v_P(D) \geqq 0$ $(P \in U)$ egyenlőtlenséget teljesítő sorozatokból áll. (A megszorítási homomorfizmusok evidensek.) Az $\mathcal{A}(0)$ kévét $\mathcal{S}$-sel jelöljük. $\mathcal{A}(U)$ természetes módon k-részalgebrája $\mathcal{A}(X)$-nek, továbbá minden U nyílt halmazra és $P \in U$ pontra K_P szintén k-részalgebrája $\mathcal{A}(U)$-nak (a hiányzó komponensekbe 0-t írunk). A $K(X)$ függvénytest, figyelembe véve, hogy minden racionális függvénynek csak véges sok pólusa lehet, természetes módon beágyazható az $\mathcal{A}(X)$ adélgyűrűbe úgy, hogy az f racionális függvényhez az X-beli pontokban vett sorfejtésekből álló sorozatot rendeljük. Sőt, a konstrukciót „kévébe kötve" azt is mondhatjuk, hogy a $K(X)$ konstans kéve izomorf $\mathcal{A}$ egy $\mathcal{K}$ részkévéjével.

7.1. Állítás. *$H^1(X, \mathcal{L}(D)) \cong \mathcal{A}(X)/(\mathcal{K}(X) + \mathcal{A}(D)(X))$ mint k-vektorterek.*

Következmény. $H^1(X, O_X) \cong \mathcal{A}(X)/(\mathcal{K}(X) + \mathcal{S}(X))$.

Bizonyítás. Minthogy $\mathcal{L}(D)$ részkévéje a $K(X)$ konstans kévének, felírható a $0 \to \mathcal{L}(D) \to K(X) \to K(X)/\mathcal{L}(D) \to 0$ rövid egzakt sorozat. A 6.2 Lemmára figyelemmel a megfelelő egzakt kohomológiasorozatnak van egy

$$K(X) \to H^0(X, K(X)/\mathcal{L}(D)) \to H^1(X, \mathcal{L}(D)) \to 0$$

alakú szelete. Mármost az $U \mapsto K(X)(U)/\mathcal{L}(D)(U)$ előkéve egy globális metszetének véges sok kivétellel minden kocsányban 0 a képe, következésképpen a hozzá tartozó $K(X)/\mathcal{L}(D)$ kéve elemei olyan függvények, amelyek véges sok kivétellel minden pontban eltűnnek, és így $\big(K(X)/\mathcal{L}(D)\big)(X) = \bigoplus_{P \in X} \big(K(X)/\mathcal{L}(D)\big)_P$. Ám ha t lokális paraméter P-ben és $v_P(D) = m$, a P pontbeli kocsány éppen $K(X)/t^m O_{X,P} \cong K_P/t^m S_P$-vel izomorf, amelyeknek viszont könnyen láthatóan éppen $\mathcal{A}(X)/\mathcal{A}(D)(X)$ a direkt összege, amiből az állítás következik.

Dualitás. Az előző állítás jelentős lépés a 6.5 Tétel bizonyítása felé: ezek szerint elég a $\mathcal{A}(X)/(\mathcal{K}(X)+\mathcal{A}(D)(X))$ vektortér $J(D)$ duális teréről kimutatni, hogy izomorf az $\Omega_{-D}(X)$ k-vektortérrel. Ha ez igaz, akkor az X feletti differenciálformák Ω_X vektorterének, amely az $\Omega_{-D}(X)$-ek uniója, k-vektortérként izomorfnak kell lennie a $J = \bigcup_D J(D)$ térrel. Ω_X azonban $K(X)$ felett is vektortér, mégpedig a 4.3 Állítás szerint 1-dimenziós. De ugyanezt állíthatjuk J-ről is. Definiáljuk ugyanis J-n a $K(X)$-vektortérstruktúrát $f \in K(X), \lambda \in J(D)$ mellett az $(f\lambda)(a) = \lambda(fa)$ formulával. Ez a definíció értelmes, mert $f\lambda$ nyilvánvalóan k-lineáris leképezés, amely $\mathcal{K}(X)$-en eltűnik, továbbá $f\lambda$ láthatóan eleme $J(D-(f))$-nek. Ugyanakkor igaz a következő állítás.

7.2. Lemma. *J egydimenziós $K(X)$-vektortér.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekte, hogy J-nek van két $K(X)$ felett független λ_1, λ_2 eleme. Minthogy $D \leqq D'$ esetén $\mathcal{A}(D)(X) \subset \mathcal{A}(D')(X)$, és így $J(D) \supset J(D')$, infimumot véve feltehető, hogy λ_1, λ_2 ugyanannak a $J(D)$ térnek az elemei. Legyen $P \in X$ rögzített pont, n pozitív egész, és tekintsük az nP divizorhoz tartozó $L(nP)$ teret. Ha $f, g \in L(nP)$, a fentiek fényében $f\lambda_1, g\lambda_2 \in J(D-nP)$. Minthogy λ_1, λ_2 függetlenek $K(X)$ felett, az $(f, g) \mapsto f\lambda_1 + g\lambda_2$ megfeleltetés beágyazza az $L(nP) \oplus L(nP)$ k-vektorteret $J(D-nP)$-be, amiből

$$\dim J(D-nP) = \dim H^1(X, \mathcal{L}(D-nP)) \geqq 2 \dim L(nP).$$

Mindkét oldalt a kohomologikus Riemann–Roch-formula alapján átalakítva kapjuk, hogy

$$n + \deg D + g - 1 + \dim L(D-nP) \geqq 2 \dim L(nP) \geqq 2(n+1-g),$$

ami elég nagy n-re ellentmondás, figyelembe véve, hogy ilyenkor $L(D-nP) = 0$.

Most már csak azt kell igazolnunk, hogy $J \neq 0$. Ehhez elég valamelyik $J(D)$ térről kimutatni, hogy nemtriviális. Ha X nem izomorf a projektív egyenessel, $D = 0$ megfelelő, hiszen $J(0) = 0$-ból $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ következne, tehát a Mittag–Leffler-problémáról mondottak szerint speciálisan pl. létezne olyan függvény, amelynek adott pontban elsőrendű pólussal rendelkezne, másutt pedig reguláris volna, amiről a 3. fejezetben láttuk, hogy csak $X = P^1(k)$-ra lehetséges. Utóbbi esetben alkalmas D keresését az olvasóra bízzuk, megjegyezvén, hogy az alábbi bizonyításból ilyen D létezése következni fog.

A keresett izomorfizmus definiálásához szükségünk van még differenciálformák reziduumainak a fogalmára. Ha $P \in X$ adott pont, t pedig lokális paraméter P-ben, tetszőleges $\omega \in \Omega_X$ differenciálforma $\omega = f dt$ alakba írható, természetesen adódik tehát, hogy ω P beli $\mathrm{Res}_P(\omega)$ reziduumát úgy értelmezzük, mint f P-beli Laurent-sorfejtésében t^{-1} együtthatóját. A baj csak az, hogy ez a definíció látszólag függ a t lokális paraméter választásától. A komplex test felett könnyen látható, hogy ez nincs így, mert a reziduum kifejezhető egy P körüli alkalmas kis körvonalon vett integrállal. Az általános esetben az invarianciát egy John Tate-től származó általános konstrukcióból fogjuk levezetni. Ugyancsak fogadjuk el egyelőre a reziduumokra vonatkozó alapvető eredményt:

7.3. Tétel (Reziduumtétel). *Ha X absztrakt Riemann-felület,*

$$\sum_{P\in X} \mathrm{Res}_P(\omega) = 0.$$

Minthogy tudjuk, hogy ω-nak csak véges sok pólusa van X-en, a tételbeli összeg véges. A komplex esetben a tételt nem nehéz a Stokes-formula egy speciális esetének segítségével bizonyítani, l. pl. Halász [11], Forster [5] vagy Mumford [17] munkáit. Mi viszont ezt az állítást is az absztrakt reziduumkonstrukció következményeként fogjuk megkapni.

Mindennek fényében definiáljuk a $\delta : \Omega_X \to J$ leképezést a

$$\delta(\omega)(a) = \sum_{P\in X} \mathrm{Res}_P(a_P\omega)$$

formulával, ahol a_P az $a \in \mathcal{A}(X)$ adél P pontbeli komponense. (Itt $a_P\omega$ reziduuma úgy értendő, hogy az $\omega = f dt$ felírásban szereplő f sorfejtését megszorozzuk a_P-vel, és a szorzat reziduumát nézzük.) $\delta(\omega)$ nyilvánvalóan k-lineáris leképezés, amely a reziduumtétel miatt eltűnik $\mathcal{K}(X)$-en. Másrészt ha az ω differenciálforma $\Omega(-D)$-ben van, akkor $\delta(\omega)$ $\mathcal{A}(D)(X)$-en is eltűnik, a definíció tehát értelmes, pontosabban azt is látjuk, hogy $\delta(\omega)$ $\Omega(-D)$-n indukál egy $J(D)$-be menő leképezést. Megmutatjuk, hogy így épp a keresett izomorfizmust kaptuk meg.

7.4. Lemma. *Ha $\delta(\omega) \in J(D)$, akkor $\omega \in \Omega(-D)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekte, hogy valamely P pontra $v = v_P(\omega) < v_P(D)$. Vegyük azt az a adélt, amelynek P-n kívüli komponensei 0-k, a P-beli komponens pedig $a_P = 1/t^{v+1}$ valamilyen t lokális paraméterrel. Minthogy $v_P(a_P\omega) = -1$, $\delta(\omega)(a) = \mathrm{Res}_P(a_P\omega) \neq 0$, ami nem lehet, hiszen $v_P(D) - v - 1 \geqq 0$ miatt a benne van $\mathcal{A}(D)(X)$-ben, tehát $\mathrm{Ker}\,\delta(\omega)$-ban is.

Bizonyítás a 6.5 Tételre. Az előző lemma miatt elég megmutatnunk, hogy δ izomorfizmus Ω_X és J között. Az injektivitás is jól látszik a lemmából, hiszen ha $\delta(\omega) = 0$, akkor ω-nak minden D divizorra benne kell lennie $\Omega(-D)$-ben, ami csak $\omega = 0$-ra lehet. De akkor δ szürjektív is, hiszen mindkét vektortér 1-dimenziós $K(X)$ felett.

A dualitástétel más alakjai. Nem tanulság nélkül való explicite felírni, voltaképpen mit is állít a Serre-dualitás a Mittag–Leffler-probléma megoldhatóságáról.

Mint láttuk, a problémát megadó koláncnak megfelel a $H^1(X, \mathcal{L}(D))$ kohomológiacsoport egy α eleme, amely pontosan akkor 0, ha a probléma megoldható. Másrészt mivel $H^1(X, \mathcal{L}(D))$ véges dimenziós, ez csak úgy lehet, ha $J(D)$ minden eleme eltűnik α-n. Azonban $J(D)$ minden λ eleme egy $\omega \in \Omega(-D)$ differenciálforma δ-képe, így ha α adélikus alakja $\alpha = (a_P)$, a probléma akkor és csak akkor megoldható, ha $\sum \mathrm{Res}_P(a_P\omega) = 0$ minden ω-ra. A feltétel szükségességét a reziduumtétel adja, az érdekes az, hogy ez elegendő is. Nyilvánvalóan elég csak azokra a P_i pontokra összegezni, amelyekben ω-nak vagy f_{P_i}-nek pólusa van. Legyen t_i lokális paraméter P_i-ben, és nézzük f_{P_i}, illetve $\omega = g_i dt_i$ ottani sorfejtéseit:

$$f_{P_i} = \sum_{k=m_i}^{\infty} a_{ki} t_i^k, \quad \omega = \sum_{l=-m_i}^{\infty} b_{li} t_i^l dt_i$$

A Mittag–Leffler problémára vonatkozó feltétel ezek szerint egyszerűen a

$$\sum_{m_i>0} \sum_{l=1}^{m_i} a_{l-1,i} b_{-li} + \sum_{m_i<0} \sum_{k=1}^{-m_i} a_{-ki} b_{k-1,i} = 0$$

lineáris egyenletrendszerrel ekvivalens, ahol ω befutja $\Omega(-D)$ egy bázisát.

E klasszikus tétel után lássuk a tétel „kévébe kötött" változatát. Definiáljuk a $\mathcal{J}$ előkévét úgy, hogy $\mathcal{J}(U)$ elemei azon J-beli lineáris függvények $A(U)$-ra vett megszorításai legyenek, amelyek eltűnnek $\mathcal{S}(U)$-n. (Érdemes már most észrevenni, hogy az $\omega \in \otimes(U)$ differenciálformára $\delta(\omega)$ ilyen lesz.) A megszorítási homomorfizmusok egyszerűen a függvények megszorításai.

7.5. Lemma. *A most definiált $\mathcal{J}$ előkéve kéve, amelyet X dualizáló kévéjének nevezünk. A P pontbeli kocsány azon $\lambda \in J$ lineáris függvényekből áll, amelyekre $\lambda\,|_{K_P}$ eltűnik S_P-n.*

(λ megszorítása értelmes, mert mint már korábban megállapítottuk, K_P k-altere $\mathcal{A}(X)$-nek.)

Bizonyítás. Az (1) kéveaxióma abból következik, hogy ha $\{V_i\}$ nyílt fedése U-nak, akkor az $\mathcal{A}(V_i)$ k-vektorterek generálják $\mathcal{A}(U)$-t. (2) teljesüléséhez elég belátni, hogy ha J két λ_1, λ_2 eleme megegyezik valamely U nyílt halmazhoz tartozó $\mathcal{A}(U)$ altéren, akkor $\lambda_1 = \lambda_2$. Legyen ehhez $a = (a_P) \in \mathcal{A}(X)$ tetszőleges adél, D pedig olyan divizor, amelyre $\lambda_1, \lambda_2 \in J(D)$. Az approximációs lemma miatt található olyan $f \in K(X)$ racionális függvény, amelyre minden $P \in X \setminus U$ pontban $v_P(a_P) - v_P(f) + v_P(D) \geqq 0$. Vonjuk le a-ból az f-hez tartozó $\mathcal{K}(X)$-beli adélt, és bontsuk a különbséget $\mathcal{A}(U)$-beli és az U-n kívüli P pontokhoz tartozó K_P-beli komponenseinek összegére. Ily módon a-t véges sok olyan adél összegére bontottuk, amelyeken $\lambda_1 - \lambda_2$ eltűnik. A második állítás nyilvánvaló.

A $\mathcal{J}$ dualizáló kéve J $K(X)$-vektortérstruktúrájából természetes módon örököl egy O_X-modulusstruktúrát. Nyilvánvaló továbbá az is, hogy a $\delta : \Omega_X \to J$ homomorfizmust meghatározó formula definiál egy $\delta : \otimes \to \mathcal{J}$ O_X-modulushomomorfizmust is, amelynél a kocsányokon indukált $\otimes_P \to \mathcal{J}_P$ homomorfizmusokat egyszerűen a $\delta(\omega)(a) = \mathrm{Res}_P(a_P\omega)$ képlet adja meg.

7.6. Tétel (Serre-dualitás, 2. változat). *A $\mathcal{J}$ dualizáló kéve és a differenciálformák $\otimes$ kévéje a most definiált δ homomorfizmus útján izomorfak mint O_X-modulusok.*

Bizonyítás. A 4.4 Tétel szerint az Ω_P kocsány szabad $O_{X,P}$-modulus, amelyet bármely t lokális paraméterre a dt differenciálforma generál. Megmutatjuk, hogy $\lambda = \delta(dt)$ generálja a $\mathcal{J}_P$ kocsányt $O_{X,P}$ felett, amiből $\mathcal{J}_P$ torziómentessége miatt készen leszünk. λ generálja $K(X)$ felett a J vektorteret, így elég látni, hogy ha $f \in K(X) \setminus O_{X,P}$, akkor $f\lambda \notin \mathcal{J}_P$. Legyen ehhez $f = ut^n$ valamely $u \in O_{X,P}$ egységgel és n negatív egésszel. Ekkor $s = t^{-1-n}/u \in O_{X,P} \subset S_P$, de $f\lambda$ nem tűnik el azon az adélon, amelynek P-beli komponense s, a többi pedig 0, mert $\mathrm{Res}_P(t^{-1}dt) \neq 0$.

Vegyük észre, hogy $\mathcal{J}$ globális metszetei a 7.1 Állítás miatt éppen a $H^1(X, O_X)$ kohomológiacsoport k-duálisának elemei. Így talán ez a tétel tekinthető a klasszikus Riemann–Roch-tétel „lelkének", mert itt mutatkozik meg a legtisztábban a görbék algebrai és differenciálható struktúrájának a kapcsolata.

Tate-reziduumok. Az alábbiakban Tate [25] nyomán a reziduumok ígért absztrakt konstrukcióját ismertetjük. Kezdjük néhány lineáris algebrai segédeszközzel.

Legyen V tetszőleges k-vektortér. A $\theta \in \mathrm{End}\,(V)$ lineáris transzformációt *kvázinilpotensnek* nevezzük, ha valamely n pozitív egészre $\theta^n(V)$ véges dimenziós. A θ által V faktorterein, ill. invariáns alterein indukált leképezések szintén kvázinilpotensek, a továbbiakban ezeket is ugyanúgy jelöljük. A definíció haszna, hogy ilyen transzformációkra értelmes módon kiterjeszthetjük a nyom fogalmát, amely véges dimenzióban ismeretesen *tetszőleges* bázisban felírt mátrix főátlójában lévő elemek összegét jelenti. Nyilvánvaló ugyanis a következő lemma.

7.7. Lemma. *Legyen $\theta \in \mathrm{End}\,(V)$ kvázinilpotens leképezés. Ekkor V bármely W θ-invariáns alterére, ill. faktorterére egyértelműen értelmezhető a θ alábbi tulajdonságokkal rendelkező $\mathrm{Tr}_W(\theta)$ nyoma:*

(1) *Ha W véges dimenziós, akkor Tr_W a szokásos nyom;*

(2) *Ha W θ-invariáns altér, akkor $\mathrm{Tr}_V(\theta) = \mathrm{Tr}_W(\theta) + \mathrm{Tr}_{V/W}(\theta)$;*

(3) *Ha θ nilpotens W-n, akkor $\mathrm{Tr}_W = 0$.*

Ilyenkor ha $\theta^n(V)$ véges dimenziós, $\mathrm{Tr}_V(\theta) = \mathrm{Tr}_{\theta^n(V)}(\theta)$.

A véges dimenziós nyom lineáris függvény $\mathrm{End}\,(V)$-n. Általában egy természetes megszorítás mellett állíthatunk hasonlót: ha $U \subset \mathrm{End}\,(V)$ *kvázinilpotens altér*, azaz létezik olyan n, amelyre bármely $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathrm{End}\,(V)$ nem feltétlenül különböző transzformációkra $\theta_1 \dots \theta_n(V)$ véges dimenziós, akkor Tr_V lineáris U-n. Ilyenkor ugyanis a Lemma (és a binomiális tétel) alapján a $\theta, \psi, \theta + \psi \in U$ transzformációk nyomai kiszámíthatók azon a véges dimenziós altéren, amelyet mindazon $\theta_1 \dots \theta_n$ szorzatok képterei generálnak, amelyekben bármely $\theta_i = \theta$ vagy ψ.

Bevezetünk egy jelölést: a W, W' V-alterekre $W \ll W'$, ha $(W+W')/W'$ véges dimenziós, azaz W „olyan nagyságrendű", mint W'. W-t és W'-t *ekvivalenseknek* mondjuk, ha $W \ll W' \ll W$. Ezek után rögzített $W \subset V$ mellett definiáljuk $\mathrm{End}\,(V)$ alábbi (W-től függő) altereit:

$$U = \{\theta : \theta(W) \ll W\}, \quad U_1 = \{\theta : \theta(V) \ll W\}, \quad U_2 = \{\theta : \theta(W) \ll \{0\}\}.$$

Itt U k-részalgebrája $\mathrm{End}\,(V)$-nek, amelyben U_1 és U_2 kétoldali ideálok, továbbá mindhárom definíció láthatóan csak W ekvivalenciaosztályától függ. Ha π V-nek W-re menő projekciója, akkor $\pi \in U_1$ és $1 - \pi \in U_2$, amiből rögtön adódik, hogy $U = U_1 + U_2$. Nyilvánvaló az is, hogy az $U_0 = U_1 \cap U_2$ altér kváziniIpotens.

7.8. Lemma. *Tegyük fel, hogy a θ, $\psi \in \mathrm{End}\,(V)$ transzformációkra $\phi \in U_1$ és $\psi \in U_2$, vagy pedig $\phi \in U_0$ és $\psi \in U$. Ekkor a $[\theta, \psi] = \theta\psi - \psi\theta$ kommutátor U_0-ban van és a nyoma 0.*

Bizonyítás. Az első állítás az ideáltulajdonságból adódik, a második pedig abból, hogy U_0 kvázinilpotenciája miatt $\theta\psi$ és $\psi\theta$ nyoma kiszámítható ugyanazon a véges dimenziós altéren.

A Tate-reziduumok definíciójához szükségünk van még egy segédállításra.

7.9. Lemma. *Legyen A kommutatív egységelemes k-algebra. Tegyük az $A \otimes_k A$ k-vektorteret A-modulussá az $a(a' \otimes a'') = aa' \otimes a''$ szorzásdefinícióval. Ekkor az A feletti differenciálformák $\Omega_{A/k}$ modulusa izomorf $A \otimes_k A$-nak azon I részmodulus szerinti faktorával, amelyet az $1 \otimes aa' - a \otimes a' - a' \otimes a$ alakú elemek generálnak. A kanonikus derivációt az $a \mapsto 1 \otimes a$* mod *I megfeleltetés adja meg.*

Bizonyítás. Csak a 4.1 Lemmában szereplő univerzális tulajdonságot kell leellenőrizni. Ha M A-modulus, $D : A \to M$ pedig k-lineáris leképezés, a tenzorszorzat definíciója szerint létezik egyetlen $\phi : A \otimes_k A \to M$ leképezés, amelyre $\phi(a \otimes a') = aD(a')$. Miután ϕ A-homomorfizmus is, már a $\phi(1 \otimes a) = D(a)$ képlet is egyértelműen meghatározza. Ha most D deriváció, a Leibniz-szabály $a \mapsto 1 \otimes a$ útján pont az I-t definiáló összefüggésbe megy át, amiből az állítás következik.

7.10. Tétel. *Az előző lemma jelöléseivel legyen V A-modulus, $W \subset V$ adott k-altér, és tegyük fel, hogy bármely $f \in A$-t k-lineáris transzformációként tekintve $f(W) \ll W$, azaz a bevezetett (W-től függő) jelöléssel $f \in U$. Ekkor létezik egyetlen $\mathrm{Res}_W^V : \Omega_{A/k} \to k$ lineáris leképezés, amelyre $f dt \in \Omega_A$ esetén*

$$\mathrm{Res}_W^V(f dt) = \mathrm{Tr}_V\,([f_1, t_1]), \tag{3}$$

ahol f_1, t_1 tetszőleges olyan U-beli elemek, amelyek egyike U_1-beli, valamint $f-f_1$, $t-t_1 \in U_2$. Ezt a leképezést nevezzük Tate-reziduumnak.

Bizonyítás. A tételben szereplő f_1, t_1 elemek nyilvánvalóan léteznek, valamint a (3) képlet jobboldala értelmes, hiszen egyrészt $[f_1,t_1] \in U_1$ (mert U_1 ideál), másrészt a feltételből könnyű számolás mutatja, hogy $[f_1,t_1]-[f,t] \in U_2$, de A kommutativitása miatt $[f,t]=0$, vagyis $[f_1,t_1] \in U_0$, ami kváziniIpotens. Ebből az is adódik, hogy (3) jobboldala k-bilineáris függvénye f-nek és t-nek, továbbá a 7.8 Lemma miatt nem függ f_1,t_1 választásától. Ezért a tenzorszorzat definíciója szerint létezik egyetlen $\phi : A \otimes_k A \to k$ bilineáris függvény, amelyre $\phi(f \otimes t) = \mathrm{Tr}_V\left([f_1,t_1]\right)$, és így az előző lemma fényében csak annyit kell látnunk, hogy ϕ eltűnik az ott definiált I-n. Ha választunk egy olyan $i \in U_1$ elemet, amelyre $i-1 \in U_2$, ez következik az $[i,f_1t_1]-[if_1,t_1]-[it_1,f_1]=0$ kommutátorazonosságból, ami nyilvánvaló, mert a 7.8 Lemma miatt i-t visszacserélhetjük 1-re.

A Tate-reziduum nyilvánvalóan csak a W altér ekvivalenciaosztályától függ. További alapvető tulajdonságait foglalja össze az alábbi lemma.

7.11. Lemma. *Tegyük fel még, hogy $t(W) \subset W$.*

(1) *ha $W_f = W \cap f^{-1}(W) \cap (ft)^{-1}(W)$, és π a $W+f(W)$ altér egy projekciója W-re, akkor $\mathrm{Res}_W^V(f dt) = \mathrm{Tr}_{W/W_f}\left([\pi f,t]\right)$. (Vegyük észre, hogy W/W_f véges dimenziós, tehát a szokásos nyommal számolhatunk.)*

(2) *ha $V' \supset W$ A-részmodulus, akkor $\mathrm{Res}_W^V = \mathrm{Res}_W^{V'}$. (A felső index tehát el is hagyható.)*

(3) *ha $f(W) \subset W$ is teljesül, akkor $\mathrm{Res}_W(f dt) = 0$. Speciálisan ha W A-részmodulus, úgy Res_W azonosan 0.*

(4) *ha t egység A-ban,*

$$\mathrm{Res}_W(t^n dt) = \begin{cases} \dim_k W/t(W), & \text{ha } n=-1 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

(5) *ha W' egy másik olyan altér, amelyre $f(W') \ll W'$ minden $f \in A$-ra, akkor a $W+W'$ és $W \cap W'$ alterekre ugyanez teljesül, és $\mathrm{Res}_W + \mathrm{Res}_{W'} = \mathrm{Res}_{W+W'} + \mathrm{Res}_{W\cap W'}$.*

Bizonyítás. (1)-hez terjesszük ki π-t az egész V W-re menő projekciójává. Ekkor $\pi f \in U_1$ és $\pi f - f \in U_2$, ezért $\mathrm{Res}_W^V(f dt) = \mathrm{Tr}_V\left([\pi f,t]\right)$. De f és t felcserélhetők, és π identikus W-n, ezért $[\pi f,t] = \pi f t - t\pi f$ V-t W-be és W_f-et 0-ba viszi, amiből az állítás következik a 7.7 Lemmabeli (2) tulajdonság felhasználásával. (2) és (3) (1)-ből következnek, az utóbbi $W_f = W$ miatt. (4)-hez $n \geqq 0$ mellett válasszunk alkalmas tételbeli t_1-et és használjuk t_1^n és t_1 felcserélhetőségét; az $n \leqq -2$ eset $t^{-2-n}dt = -(t^{-1})^n d(t^{-1})$ felhasználásával visszavezethető az előzőre. $n=-1$ mellett válasszuk (1)-ben f-et t^{-1}-nek. Végül (5)-höz vegyünk olyan π_W, $\pi_{W'}$,

$\pi_{W+W'}$, $\pi_{W\cap W'}$ projekciókat, amelyek V-t rendre az indexekben szereplő alterekre vetítik, és amelyekre $\pi_W + \pi_{W'} = \pi_{W\cap W'} + \pi_{W+W'}$ fennáll. Minthogy $[\pi_W f, t]$ és $[\pi_{W+W'} f, t]$ is véges dimenziós eltéréstől eltekintve V-t $W + W'$-be, $W + W't$ W-be, azt pedig 0-ba viszik, az általuk generált End (V)-altér kvázinilpotens. Ugyanez áll a másik két projekcióra, tehát alkalmazható nemcsak a kommutátor, hanem a nyom linearitása is a

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_W(fdt) - \mathrm{Res}_{W+W'}(fdt) &= \mathrm{Tr}_V\left(\left[(\pi_W - \pi_{W+W'})f, t\right]\right) = \\ &= \mathrm{Tr}_V\left(\left[(\pi_{W\cap W'} - \pi_{W'})f, t\right]\right) = \mathrm{Res}_{W\cap W'}(fdt) - \mathrm{Res}_{W'}(fdt)\end{aligned}$$

egyenlőtlenségláncban.

A reziduumtétel. Térjünk vissza most a geometriához! A 7.10 Tételben definiált reziduumleképezést fogjuk megvizsgálni abban a speciális esetben, amikor A helyébe a $K(X)$ függvénytestet, V helyébe a K_P testet, W helyébe az $S_P \cong k[[t]]$ hatványsorgyűrűt írjuk, ahol t lokális paraméter P-ben. Ahhoz, hogy a tétel alkalmazható legyen, meg kell vizsgálnunk, hogy tetszőleges $f \in K(X)$ mellett az $(f(S_P) + S_P)/S_P$ k-vektortér véges dimenziós. De ez nyilvánvaló, hiszen valamilyen n egész számmal és $u \in O_{X,P} \subset S_P$ egységgel $f = ut^n$ alakba írható, továbbá $n < 0$ esetén $t^n S_P/S_P \cong k^n$. Így $S_P/tS_P \cong k$-ból és a 7.11 Lemma (3), (4) pontjából azonnal következik, hogy ha $f = \sum_m^\infty a_i t^i$ az $f \in K(X)$ Laurent-sorfejtése P-ben, akkor $\mathrm{Res}_{S_P}(f)$ *mirabile dictu* éppen a_{-1}-gyel egyenlő. Jogos tehát Res_{S_P}-re a Res_P jelölés. A Tate-reziduum csak az S_P gyűrűtől függ, nem pedig a t lokális paramétertől, így a reziduum paramétertől való függésével nincs gond. Ugyanúgy nem nehéz most már a reziduumtétel bizonyítása sem.

Bizonyítás a 7.3 Tételre. Vegyünk egy olyan U nyílt halmazt, amely nem tartalmazza az $\omega = fdt$ differenciálforma felírásában szereplő f és t póIushelyeit. Ekkor U minden pontjában ω reziduuma 0, de ennél többet is mondhatunk, nevezetesen, hogy a fejezet elején bevezetett $\mathcal{S}$ kévére a 7.11 Lemma (3) pontja szerint $\mathrm{Res}_{\mathcal{S}(U)}(fdt) = 0$. (Itt a V modulus szerepét pl. az $\mathcal{A}(U)$-beli adélek játsszák.) Ugyanezen lemma (5) pontjának felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{S}(X)}(fdt) = \mathrm{Res}_{\mathcal{S}(U)}(fdt) + \sum_{P\notin U} \mathrm{Res}_P(fdt) = \sum_{P\notin U} \mathrm{Res}_P(fdt).$$

Másrészről a segédállítást még egyszer alkalmazva kapjuk, hogy

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{K}(X)+\mathcal{S}(X)} + \mathrm{Res}_{\mathcal{K}(X)\cap\mathcal{S}(X)} = \mathrm{Res}_{\mathcal{K}(X)} + \mathrm{Res}_{\mathcal{S}(X)},$$

ahol, mint emlékszünk, $\mathcal{K}(X)$ a $K(X)$ függvénytest beágyazása az $\mathcal{A}(X)$ adélgyűrűbe. De itt $\mathrm{Res}_{\mathcal{S}(X)}$-en kívül minden más tag 0. $\mathrm{Res}_{\mathcal{K}(X)}$ azért, mert $\mathcal{K}(X)$ $K(X)$-modulus, a baloldal második tagja pedig azért, mert $\mathrm{Res}_{\mathcal{K}(X)\cap\mathcal{S}(X)} \cong O(X)$, tehát egydimenziós k-vektortér, a reziduum viszont invariáns a bevezetett ekvivalenciára. Végül a 7.1 Állítás következménye és a 6.3 Tétel szerint $\mathcal{A}(X)/(\mathcal{K}(X) + \mathcal{S}(X))$ véges dimenziós k felett, tehát elég $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}(X)} = 0$-t belátni, ami teljesül, mert az adélgyűrű is $K(X)$-vektortér.

Befejezésül még megmutatjuk, hogyan lehet a reziduumtétel segítségével — immár harmadszor — bizonyítani a közkedvelt 3.2 Állítást. Alkalmazzuk ugyanis a tételt az $f^{-1}df$ differenciálformára. Azokban a P pontokban, ahol $v_P(f) = 0$, a 7.11 Lemma (3) pontja szerint 0 a reziduum, ahol pedig gyöke van, a lemma (4) állítása következtében éppen $v_P(f)$. Végül a pólushelyeken is $v_P(f)$ a reziduum, mert az $f^{-1}df = -fd(f^{-1})$ egyenlőség felhasználásával visszajutunk az előző esetre.

Jegyzetek. Kétségtelen, hogy a reziduumok Tate-féle konstrukciója első látásra *deus ex machina* jellegű. A valóságban azonban sok elemet használ a reziduumtétel korábbi bizonyításaiból. Az első, Hasse-féle megközelítés olvasható Lang [14,15] vagy Serre [20] könyveiben, egy másik, Cartiertől származó konstrukciót közöl Eichler [4]. Ha az olvasó e bizonyításokkal is megismerkedik, minden bizonnyal nagyobb becsben fogja tartani a Tate-féle gondolatmenetet.

A dualitástétel, mint említettük, általánosítható magasabb dimenziós nemszinguláris varietásokra is. Mitöbb, a nemszingularitás feltevése el is hagyható, ekkor azonban általában csak egy absztrakt dualizáló kéve jelenlétét lehet biztosítani (vagy még azt sem). Lásd erről Hartshorne [12] könyvét.

Megjegyezzük végül, hogy a 7.1 Állítás természetesebben bizonyítható „kévébe kötött" formában. Ehhez azt érdemes észrevenni, hogy az $U \mapsto \mathcal{A}(U)/\mathcal{A}(D)(U)$ előkéve már maga is kéve. Az (1) kéveaxióma nyilvánvaló, a (2) axióma teljesülésének viszont könnyen láthatóan elegendő feltétele a $H^1(X, \mathcal{A}(D))$ kohomológiacsoport eltűnése, ami teljesül, mert $\mathcal{A}(D)$ *kornyadt* (vö. az előző fejezet jegyzeteivel). Az egzakt kohomológiasorozatot ezek után a $0 \to \mathcal{L}(D) \to \mathcal{K} \to \mathcal{A}/\mathcal{A}(D) \to 0$ sorozatra írjuk fel, amelynek egzaktságát nem nehéz ellenőrizni.

Irodalom

[1] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip Griffiths and Joe Harris, *Geometry of Algebraic Curves I,* Springer Grundlehren **267**, Berlin — Heidelberg, 1985.

[2] Enrico Bombieri, Counting points over finite fields (d'après S. A. Stepanov), *Séminaire Bourbaki 1972/73, exp. 430,* Springer LNM **383**, 1974, 234–241.

[3] Pierre Cartier, Dérivations dans les corps, *Séminaire Cartan-Chevalley 1955/56,* Paris, 1956.

[4] Martin Eichler, *Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen,* Birkhäuser, Basel - Stuttgart, 1963.

[5] Otto Forster, *Riemannsche Flächen,* Springer HT **184**, Heidelberg, 1977.

[6] Fried Ervin, *Általános algebra,* Tankönyvkiadó, Bp., 1989.

[7] William Fulton, *Algebraic Curves,* W.A. Benjamin, New York - Amsterdam, 1969.

[8] Roger Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux,* Hermann, Paris, 1958.

[9] Alexandre Grothendieck, *Eléments de géométrie algébrique,* III: Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Publ. Math. IHES, Paris, 1962.

[10] Robert C. Gunning, *Lectures on Riemann Surfaces,* Princeton University Press, 1966.

[11] Halász Gábor, *Riemann-felületek,* kézirat.

[12] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer GTM **52**, New York, 1977.

[13] Kollár János, *Algebrai görbék*, Matematikai Lapok, **28** (1980), 153–198.

[14] Serge Lang, *Introduction to Algebraic Geometry*, Interscience, New York, 1958.

[15] Serge Lang, *Introduction to Algebraic and Abelian Functions*, 2nd ed., Springer GTM **89**, New York, 1982.

[16] Hideyuki Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1988.

[17] David Mumford, *Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties*, Springer Grundlehren **221**, Berlin — Heidelberg, 1976.

[18] David Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, Springer LNM **1358**, 1988.

[19] Horst Schubert, *Topológia*, Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1986.

[20] Jean-Pierre Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math., **61** (1955), 197–278.

[21] Jean-Pierre Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.

[22] Igor R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry I–II*, 2nd ed., Springer, Berlin — Heidelberg, 1994.

[23] Joseph H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer GTM **106**, New York, 1986.

[24] Hanning Stichtenoth, *Algebraic Function Fields and Codes*, Springer Universitext, Berlin — Heidelberg, 1993.

[25] John Tate, *Residues of Differentials on Curves*, Ann. Sci. ENS, 4^{e} série, **1** (1968), 149–159.

[26] B. L. van der Waerden, *Algebra II*, 5. Auflage, Springer HT **23**, Heidelberg, 1971.

[27] William C. Waterhouse, *Introduction to Affine Group Schemes*, Springer GTM **66**, New York, 1979.

[28] Oscar Zariski, *Report on the Second Summer Institute*, Part III: Algebraic Sheaf Theory, Bull. Amer. Math. Soc., **62**, (1956), 117–141.

Tamás Szamuely: On the Riemann–Roch Theorem

This expository paper develops from scratch some of the most basic topics in the theory of algebraic curves, emphasising the central role played by the celebrated Riemann–Roch theorem. After an elementary treatment of the most important algebraic, geometric and analytic aspects of curves, several interpretations of the theorem are given, together with applications to ramification theory and the construction of projective embeddings of proper smooth curves. The proof is a cohomological version of Weil's adelic argument but it uses Tate's construction of residues instead of the classical one. Some of the less standard features are the derivation of the finiteness of the first cohomology group without making appeal to the projective case as well as the detailed construction of the dualizing sheaf in terms of adeles, following hints of Tate.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Matematikai Lapok

1993 / 3

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 3. évfolyam (1993), 3. szám

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201–7656.

Előfizetési díj 1995-re 550 Ft+ÁFA, egyes szám ára 150 Ft+ÁFA.

* Megjegyzés: Korábbi előfizetőknek a lap ára az eddigi befizetés függvénye.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

SZEGŐ GÁBOR EMLÉKÜLÉS

Kunhegyes, 1995. január 21.

PETRUSKA GYÖRGY

Szegő Gábor születésének 100. évfordulója alkalmából 1995. január 21-én a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Osztálya, a Bolyai János Matematikai Társulat, és Kunhegyes Város Önkormányzata emlékülést rendezett Kunhegyesen, Szegő Gábor szülővárosában.

Az emlékülés délelőtti programjában Császár Ákos elnökletével Szegő Gábor életútját ismertető és méltató előadások hangzottak el. A Városi Művelődési Központ nagy előadótermét megtöltő hallgatóság előtt először Baranya Pál jegyző mondott köszöntőt, majd Daróczyné Kotora Erzsébet mondta el Szénássy Barna jegyzetei alapján összeállított beszédét. Utána Lee Lorch (York University, Canada) és Richard Askey (University of Wisconsin, USA) — akik személyesen nem tudtak megjelenni — megemlékező írásait Petruska György olvasta fel. A délelőtti programot Névai Pál (Columbus, Ohio) színes előadása zárta, melyben felidézte Szegőhöz fűződő személyes jellegű és tudományos emlékeit.

Az ebédszünet után a megemlékezés a Szegő Gábor kutatásaihoz kapcsolódó tudományos előadásokal folytatódott. A Mini Szeminárium keretében Vértesi Péter, Halász Gábor, Petruska György és Névai Pál tartott előadást.

Az alábbiakban közreadjuk Daróczyné Kotora Erzsébet és L. Lorch emlékbeszédét. R. Askey és Névai Pál eredeti előadása helyett a mindkettő anyagánál bővebb tartalmú közös cikkük magyar fordítását illesztettük ide, melyet Szegő Gábor emlékére írtak a The Mathematical Intelligencer c. folyóirat számára. A tudományos előadások közül Vértesi Péter és Halász Gábor ott elhangzott dolgozatát, valamint Halász Gábornak a Mini Szemináriumhoz kapcsolódó további munkáját közöljük.

Az emlékülés napján a kunhegyesi Zsigmond Ferenc Városi Könyvtár galériájában Daróczy Zoltán nyitotta meg a Szegő Gábor Emlékkiállítást, itt Szeleczky István polgármester mondott köszöntőt. A 3 hónapon át nyitvatartó kiállítás dokumentumokban mutatta be Szegő Gábor életét.

A Kunhegyesre látogató matematikusok nagy örömmel és meghatottsággal tapasztalták, hogy a város polgársága és vezetése mennyire fontosnak tartja a művelődés ügyét, mekkora odaadással óvják és ápolják a város kultúrális hagyományait.

A kunhegyesi emlékülés és kiállítás példamutató lehetőséget adott arra, hogy világhírű tudósunkról, Szegő Gáborról méltó módon megemlékezhessünk. Ezért ezúton is köszönetünket fejezzük ki a kunhegyesi rendezvény-sorozat valamennyi szervezőjének, támogatójának, közreműködőjének.

Külön köszönetet mondunk itt Névai Pálnak, aki az emlékülést követően gyűjtést indított Szegő Gábor mellszobrának elkészítésére és felállítására. Fáradozásait a külföldi és hazai adományok segítségével siker koronázta. A szobrot Győrfi Lajos szobrászművész készítette el, és Kunhegyesen, a városi könyvtár előtt 1995. augusztus 23-án ünnepélyesen felavatták.

György Petruska: Szegő Gábor memorial (Kunhegyes, January 21, 1995).

The Hungarian Academy of Sciences, the János Bolyai Mathematical Society and the Government of the City of Kunhegyes held a conference on January 21, 1995 in Kunhegyes to commemorate the centennial of the birth of Gábor Szegő in his native town.

Hosted by the great auditorium of the Civic Center, the morning session featured four lectures on the life and scientific achievements of Szegő. Mrs. Erzsébet Daróczy née Kotora gave a talk based upon the notes of Barna Szénássy. The reminiscences by Lee Lorch (York University, Canada) and Richard Askey (University of Wisconsin, USA), in their absence, was translated and read by György Petruska. The session concluded with the colorful talk of Paul Nevai (Ohio State University, Columbus) recalling both his personal as well as professional memories on Szegő. After lunch the program continued with mathematical lectures related to the work of Szegő. The speakers of this mini seminar were Péter Vértesi, Gábor Halász, György Petruska, Paul Nevai.

In this memorial volume we publish the talks by Mrs. Daróczy and by L. Lorch. Rather than the original presentations by R. Askey and P. Nevai we included here the Hungarian translation of their joint paper written for the Mathematical Intelligencer. This paper contains even more details and wonderful personal memories of many other friends, pupils and colleagues of Szegő, and provides an even deeper understanding of the tremendous impact Szegő exerted on the development of mathematics.

As of the scientific talks of the afternoon session, this volume contains the lectures of P. Vértesi and of G. Halász, and in addition to those a subsequent paper by G. Halász with its topic closely related to the program of the mini seminar.

SZEGŐ GÁBOR ÉLETÚTJA

Dr. Szénássy Barna kézirata alapján
összeállította és felolvasta *Daróczyné Kotora Erzsébet*

Szegő Gábor száz éve, 1895. január 20-án született Kunhegyesen. Édesapja Szegő Adolf, édesanyja Neumann Hermina volt. Szülei foglalkozására nézve nincsenek biztos adatok. Valószínűleg közepes módú kereskedő családként lehet Szegőéket jellemezni.

Elemi iskolába Kunhegyesen járt, hogy pontosan a város melyik iskolájába, nem állapítható meg, mivel az erre vonatkozó helyi iratok megsemmisültek. Innen tíz éves korában Szolnokra került a Magyar Királyi Állami Gimnáziumba (ma ez a Verseghy Ferenc Gimnázium). Itt érettségizett 1912-ben igen kiváló eredménnyel: minden tárgyból jelest kapott, a görög nyelvet kivéve. Gimnazista éveiről Szegő Gábor egy interjúban így nyilatkozott:

„Vidéki gimnáziumba, a szolnoki gimnáziumba jártam, ami bizony éppen illő volt Szolnok akkori fejlettségéhez. Akkor még nem volt a város olyan nagy ipari centrum, mint jelenleg, s a gimnázium könyvtára is szegényes volt, mindössze két matematika tárgyú könyv akadt a polcokon. Ám ahogy ez lenni szokott Magyarországon, a tanárok közt akadtak kitűnő, jó felkészültségű és a matematika iránt rajongó pedagógusok, akik a hóna alá nyúltak a tárgy iránt érdeklődő diáknak, így nekem is."

Felsőbb osztályos tanulóként rendszeres feladatmegoldója volt a Középiskolai Mathematikai Lapoknak. Ha fellapozzuk ezen folyóirat korabeli köteteit, gyakran találkozunk nevével a feladatok beküldői és megoldói között. Nem meglepő ezek után, hogy 1912-ben Szegő Gábor nyerte a Mathematikai és Physikai Társulat XIX. matematikai tanulóversenyét. Szegő Gábor szerint az egyetlen komoly matematikai verseny volt abban az időben az országban. Három kitűzött feladatot kellett megoldani a versenyzőknek, akik közül az bírálóbizottság — melynek igen jeles tagjai voltak pl. Kőnig Gyula, Fejér Lipót, Kőnig Dénes, Kürschák József és Rátz László — Szegő dolgozatát ítélte a legjobbnak, így ő nyerte el az első díjat.

A jelentés indoklása szerint:

„A bizottság a benyújtott dolgozatokat átvizsgálva és mértékelve, az első jutalomra Szegő Gábort, a szolnoki állami főgimnáziumban Zoltán Lipót tanítványát ajánlja, ki nemcsak mind a három feladatot hibátlanul oldotta meg, hanem a nehezebb első tétel kidolgozásában öntudatos eljárásával kiváló elmét tanúsított."

A három feladat egyébként a következő volt:

1. Hány olyan n-jegyű szám van, amely csupán az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de a három számjegy mindegyikét legalább egyszer?
2. Bebizonyítandó, hogy bármely pozitív egész számot jelent is n,

$$5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

mindenkor osztható 8-cal.
3. Bebizonyítandó, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha két szembenlévő oldal négyzetének összege egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével.

Az első feladatot helyesen csak Szegő Gábor oldotta meg.

Eredményes gimnáziumi évei és a matematika iránti fogékonysága, érdeklődése nyilván befolyásolták abban, hogy 1912-ben a Budapesti Pázmány Péter Tudományegyetem hallgatója lett matematika-fizika szakon, és az Eötvös Kollégium lakója. Vallomása szerint első tanárai, akiktől a matematika alapfogalmait megtanulta Fejér Lipót és Pólya György voltak. Hatott rá Beke Manó, Eötvös Loránd is. Kedvenc olvasmányai közé tartoztak Beke Manó és Kőnig Dénes matematikai könyvei.

A magyar és a német egyetemi félévek időbeosztásának különbözősége miatt lehetővé vált számára, hogy a magyar mellett német előadásokat is hallgasson, megismerje a külföldi egyetemek kiváló matematikusait.

Csak érdekességként megemlítjük, hogy egyetemi hallgató korában kapcsolatba került Neumann Jánossal, mint Szegő Gábor fogalmazott: „hetenként egyszer-kétszer összejöttünk Neumannal, teáztunk, matematikáról beszélgettünk". „... Neumann-nak senkitől sem kellett tanulnia."

Fiatal éveiben itthon szinte atya-fiúi kapcsolat fűzte Fejér Lipóthoz. Később ez a kapcsolat barátivá vált. Levelezésük tanúsága szerint Fejér Lipót legmeghittebb barátja — talán egész életén át — Szegő Gábor volt. Szegő Gábor nagyon érdekesen nyilatkozott róla: „Sok nagy név volt akkor már a magyar matematikában .... De egyiknek sem volt Fejér Lipótéval összehasonlítható hatása."

Szegő Gábort baráti szálak fűzték a nála nyolc évvel idősebb Pólya Györgyhöz is.

A nyugodt, tanulmányokkal, kutatásokkal telt időszaknak 1915-ben lett vége, amikor behívták a Monarchia hadseregébe katonának. A déli és az északi országrészeken katonáskodott, azonban amennyire a körülmények lehetővé tették, megpróbált tudományos kutatással is foglalkozni.

1918-ban doktorált a bécsi Tudományegyetemen, ahol számos jeles matematikussal kötött életreszóló barátságot. Közöttük volt a nála idősebb — rendkívül változatos életű — Kármán Tódor (1881–1963), akit született nagyothallása miatt az Osztrák Légierő kutató laboratóriumába osztottak be. Az ő aerodinamikával kapcsolatos alapvető kutatásai hatással voltak Szegő Gábor matematikai tevékenységére is. A háború végeztével tanársegédi állást kapott a Műegyetem Kürschák tanszékén. A trianoni békeszerződés következtében az egyetemi előrehaladásra gyakorlatilag semmi reménye nem volt, így megpróbált Németországban boldogulni.

Magánéletében 1919-ben nagy változás történt, feleségül vette Neményi Annát, aki kémiából doktorált a budapesti egyetemen. 1920-ban együtt távoztak Németországba, Berlinbe, ahol előbb felesége kapott állást az ottani Kereskedelmi Akadémián. Szegő Gábor rövid ideig egy pénzintézetnél dolgozott, majd a Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik című folyóiratnál elég kedvező beosztáshoz jutott. Ebben az állásában megismerhette a matematika sok ágát, s azok eredményeit.

Közben kutatott, publikációi jelentek meg. A berlini egyetemen 1921-ben habilitált és megkapta a magántanári címet. Előrehaladása innentől kezdve már igen gyors volt.

Minden évben hazalátogatott Magyarországra. Fejér Lipóttal ilyen alkalmakkor rendszeresen találkozott. Későbbi visszaemlékezésében szép emlékei közé sorolta azokat „a szombatonkénti kávéházi törzsasztalnál" folyó minden témára kiterjedő beszélgetéseket.

1924-ben idehaza is komoly elismerésben részesült matematikai munkásságáért. Kőnig Dénes és Kőnig György 1917-ben nagynevű atyjuk emlékére egy Kőnig alapítványt létesítettek, amelynek kamataiból kétévente egy magyar matematikus 1000 koronás „Kőnig Gyula-jutalomban" részesülhetett. Az alapítványt a Mathematikai és Physikai Társulatnál tették. Az első alkalommal 1920-ban kellett volna odaítélni, azonban ez a háború utáni viszonyokban lehetetlen volt, így elsőként Bauer Mihály műegyetemi adjunktus kapta meg 1922-ben. 1924-ben ezt a jutalmat ítélték oda Szegő Gábornak. Riesz Frigyes értékelte az Eötvös Loránd Mathematikai és Physikai Társulat 1924. április 10-én tartott ülésén. Az értékelés teljes terjedelemben megjelent a társulat Mathematikai és Physikai Lapok című folyóirata 32. kötetében. Jelentésében többek között ezt írta:

„Szegő Gábor körülbelül nyolcesztendős irodalmi munkássága nagyon bőségesen produkált, méltóztassék megengedni, hogy dolgozatai közül azokra szorítkozzam, amelyek eredményeik vagy módszereik újsága, szépsége és fontossága által figyelmemet leginkább megragadták."

Ugyanakkor jelentése végén nem mulasztja el megemlíteni, Szegő Gábor igen „gondos, pontos, a lényeget jól ismertető, szükség esetén kritizáló" referátumait, amelyek a már említett Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik c. folyóirat 1914–18-as évkönyvében jelentek meg, lényegesen hozzájárulva az évkönyv színvonalának emeléséhez." Ez is jelentős érdem — írta Riesz Frigyes — különösen amióta és ameddig a különböző nemzetek tudósainak érintkezését anyagi és egyéb okok megnehezítik.

1925-ben Szegő Gábor a berlini egyetem rendkívüli professzora lett. Az év nagy eseménye a család számára: megszületett fiuk, Péter.

Ugyanebben az évben jelent meg a Pólya Györggyel közösen írt feladatgyűjtemény: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I–II. A Springer kiadó adta ki Berlinben. Ez a könyv az első megjelenés óta sok kiadást megélt, magyarul és angolul is megjelent. A könyv mottója: „Mit jelent tanítani? Rendszeres alkalmat adni a tanulónak arra, hogy saját maga jöjjön rá a dolgok nyitjára" utal a szemléletmódra: „módszeresen elrendezett feladatok segítségével hozzászoktatni az önálló gondolkodás és kutatás módszereihez és eszközeihez a matematika iránt érdeklődőket.

1926-ban Knopp professzor távozása révén megürült egy katedra Kőnigsbergben, és erre Szegő Gábort hívták meg. Októbertől már itt adott elő.

Matematikai kutatások terén rendkívül eredményes évek következtek. Külföldi utazásai alkalmával szoros szakmai kapcsolatra tett szert neves matematikusokkal és megelégedést tükröztek, a német életnívónak a hazaihoz képest magasabb értékelését a szakmai tudományos élet magas színvonalát is dicsérettel emlegette. 1928-tól olykor hazalátogatott Budapestre.

Több alkalommal kísérelte meg Fejér Lipótot rávenni, látogassa meg Kőnigsbergben és tartson néhány — szerény javadalmazással járó — előadást. Fejér Lipót azonban e meghívásnak a fáradtságos utazás miatt sohasem tett eleget. Utolsó alkalommal 1932-ben volt erről szó, amikor két előadás tartására hívta meg Kőnigsbergbe 1933. január-februárra, amely idő alatt saját otthonában látta volna vendégül. Ez a kísérlete is eredménytelen maradt.

1929-ben megszületett lánya, Veronika.

A következő esztendő végén nagy ünnepséget rendeztek Kőnigsbergben David Hilbert tiszteletére, díszpolgárrá választása alkalmából. Hilbert nagysikerű előadásáról hanglemez készült, amelyet Szegő Gábor — édesanyja révén — Magyarországra is elküldött, állítólag két példányban, azonban kérdéses, hogy fellelhetők-e illetve megvannak-e még.

1932-től a politikai helyzet Németországban rosszabbodott. Szegő Gábor egy 1932. december 3-i keltezésű levelében ez olvasható: „... a jövő itt erősen bizonytalan, a jelen számunkra egyenlőre még elviselhető, sőt relatíve kielégítő". A következő évben még hazalátogatott Budapestre. Az ezután írt levelei egyre szomorúbbak, tele vannak rossz hírekkel, aggodalommal. Származásuk miatt több kiváló professzort nyugdíjaztak, Szegő Gábor maga is bizonytalannak, aggasztónak látta saját és családja jövőjét.

Miután Fejér Lipót tájékoztatása szerint arra nem volt lehetőség, hogy itthon tudományos munkásságának megfelelő állást kapjon, Amerikában élő kortársaihoz, barátaihoz fordult segítségért. 1934 májusában levelet írt Tamarkinnak, a jeles matematikusnak, aki korábban emigrált Amerikába. Ugyanakkor Pólya Györgynek is írt Svájcba, az iránt érdeklődve, hogy milyenek a külföldi — nyilvánvaló: Németországon kívüli — elhelyezkedési kilátások.

Levelezésének, kiterjedt baráti kapcsolatainak és természetesen tudósi hírnevének meg is lett az eredménye, mert 1934. június 17-én a St. Louisi Washington

Egyetem (Missouri állam) kancellárja Kőnigsbergben személyesen adta át Szegőnek — hivatalos formában — az egyetem három évre szóló meghívását. Szegőék 1934 szeptember 27-én érkeztek meg New Yorkba, innen október 3-án utazott tovább St. Louisba. Az itt töltött idő alatt 1935 és 1938 között négy doktorandusz hallgatója is volt az előadásai mellett.

1938-ban meghívást kapott a San Francisco közelében lévő Stanford Universityre, amelynek eleget is tett, 1938 őszén már Palo Alto-ba költöztek. Az egyetemen végleges egyetemi tanár lett, csaknem négy évtizedes stanfordi professzorsága életének — tudományos szempontból — rendkívül termékeny szakasza volt.

Szegő Gábor életében 130 tudományos dolgozatot publikált különböző nyelveken. 1982-ben a Birkhäuser kiadó megjelentette összegyűjtött munkáit Collected Papers címmel, Richard Askey szerkesztésében. Négy könyvet írt: Feladatok és tételek az analízis köréből (1925, Pólya Györggyel közösen), Ortogonális polinomok (1939), Izoperimetrikus problémák a matematikai fizikában (1951, Pólya Györggyel), Toeplitz formák és alkalmazásaik (1958, Ulf Grenander-rel). Az ortogonális polinomokról írt könyve — amelynek jelentős részét saját kutatási eredményei fémjelezték — óriási hatással volt a huszadik századi matematikai analízis fejlődésére. Egyrészt Szegő Gábor rakta le a „konstruktív függvénytan” alapjait, másrészt ezek az eredmények alkalmazásra kerültek az elméleti fizikában, a sztochasztikus folyamatok elméletében és a numerikus analízisben.

A második világháború alatt átmenetileg ismét Európában tanított, ugyanis az amerikai csapatok partraszállása után a franciaországi Biarritzban az amerikai katonák részére szervezett amerikai egyetem matematika előadója volt.

A háború után Fejér Lipót mindent elkövetett annak érdekében, hogy rég nem látott barátját — néhány előadásra történő meghívás ürügyén — Budapesten viszontláthassa. Próbálkozása eredménytelen maradt. Szegő Gábor a hatvanas évektől kezdve fordult meg gyakrabban Európában és Budapesten is.

Tudományos munkásságának elismeréseként 1960-ban a Bécsi Tudományos Akadémia levelező tagja lett, 1965-ben pedig a Magyar Tudományos Akadémia választotta tiszteleti tagjává.

1968-ban meghalt felesége, Szegő Gábor hátralévő éveit részben Palo Alto-ban, részben hazánkban töltötte, az MTA illetve régi barátai vendégeként. 1969-ben Budapesten egy nemzetközi kongresszuson előadást tartott Fejér Lipót munkásságáról.

Élete utolsó évtizedében egyre inkább elhatalmasodott rajta egy hosszantartó betegség.

1985-ben egy minden szempontból tartalmas, értékekben gazdag élet után érte a halál Szegő Gábort.

Ma, itt Kunhegyesen e városban 100 éve született kiváló tudósra, Szegő Gáborra emlékezve mondhatjuk, hogy a huszadik századi magyar matematikai kultúra egyik legkiválóbb egyénisége előtt tisztelgünk.

Köszönetet mondunk ezért az ünnepi megemlékezésért mindazoknak, akik büszkék városuk nagy szülöttjére és ápolják, ápolni kívánják emlékét.

Forrás:

1. Szénássy Barna: Szegő Gábor — kézirat.
2. Riesz Frigyes: Jelentés az 1924. évi Kőnig Gyula jutalomról, *Mathematikai és Physikai Lapok,* **32** (1925), 1–6.
3. A Mathematikai és Physikai Társulat XIX. tanulóversenye, *Mathematikai és Physikai Lapok,* **21** (1912), 399–400.
4. A Mathematikai és Physikai Társulat XIX. versenyén b. Eötvös díjjal jutalmazott dolgozatok. I. Szegő Gábor dolgozata, *Mathematikai és Physikai Lapok,* **21** (1912), 401–403.
5. Kardos István: Magyar Tudósok. RTV-Minerva, Budapest 1978. 191–200.
6. Gabor Szego 1895–1985. Campus Report (Stanford University) 1985. dec. 4. 20. o.
7. Nekrolog. New York Times 17/85
8. Pólya György - Szegő Gábor: Feladatok és tételek az analízis köréből I. Tankönyvkiadó 1980. 11–16.

SZEGŐ GÁBOR — EGY ÉVSZÁZAD

LEE LORCH

Szegő Gábor nagyszerű matematikus volt. Mélyreható munkásságát Összegyűjtött Műveinek három nagy kötete (szerkesztője Richard Askey), és egyedül vagy társszerzőkkel írott hat könyve tartalmazza. Ezek nagymértékben hatottak mind az elméleti, mind az alkalmazott matematika tartalmára és irányaira. Befolyásuk még sokáig érezhető lesz a jövőben is.

Írásai, csakúgy mint előadásai és magyarázatai világosak voltak. Egyenesen és könnyed eleganciával vezettek a lényeghez. Matematikai tudásának szélessége, mélysége és pontossága legendás volt, de ezzel sohasem kérkedett. Segített, de nem volt nyomasztó. Íme egy történet — lehet, hogy kitalált — melyet egy kortársától, valószinűleg Karl Loewnertől hallottam. Az ifjú Szegő a doktori címért vizsgázik, a vizsgáztatók egyik kérdést teszik fel a másik után. A vizsgázó mindegyikre gyors, pontos és kimerítő választ ad, mígnem az egyik kérdésnél elakad. Ekkor az egyik professzor a kérdezőhöz fordult mondván, hogy nagyon érdekes a kérdés, de maga sem tudna felelni rá, és kérte a választ. „Nem tudom én sem; ha tudtam volna, nem fáradtam volna a kérdéssel."

Még csak húsz éves, amikor egy korszakos jelentőségű cikke megjelenik a világ egyik legkiválóbb matematikai lapjában. 1925-re már harminc dolgozatot publikált, mindegyik figyelemre méltó. 1925-ben jelent meg a híres Pólya–Szegő könyv „Feladatok és tételek az analízis köréből" címmel. A két kötetes mű nyomban világhírűvé vált, átformálta a matematikai analízis felső szintű oktatását, kutatását. Lefordították kínai, angol, magyar és orosz nyelvre; még ma is iránymutató. Még csak 31 éves, amikor a következő évben a Kőnigsbergi Egyetem rendes professzorává nevezték ki. Ezzel legendás hírű matematikusok: Jacobi, Hilbert, Hurwitz, Minkowski örökségét veszi át a filozófus Kant és a művész Käthe Kollwitz városában. — Évekkel később Amerika egyik leghíresebb egyeteme, a Stanford Egyetem Matematikai Tanszékének lesz vezetője. Irányításával a tanszék oly drámai fejlődésen megy át, hogy ennek eredményeképp a matematikai analízis világszerte ismert Mekkájává válik.

Mindezekből úgy tűnhet fel, hogy útja simán vezetett az egyik sikertől a másikig. Az igazság ennek az ellenkezője. Erős egyéniségének köszönhetően őrizhette csak meg matematikai tehetségét, és adhatta át emlékezetes eredményeit a világnak.

Az I. világháborúban az osztrák–magyar hadsereg katonatisztjeként a fronton teljesít szolgálatot. Eközben írja meg doktori disszertációját. Az iszonyú öldöklés — G.H. Hardy szavaival élve az öreg emberek által meghalni küldött fiatalok lemészárlása — mély nyomot hagyott benne. Talán ez fel is erősítette a matematika iránti életreszóló szenvedélyét. Bizonyosan erősen hatott a társadalomról kialakított nézeteire is. Később, nem látva más alternatívát, támogatta a fasizmus elleni háborút, de szókimondó ellenzője volt a II. világháborút követő hidegháborúnak. Ellenezte a nukleáris fegyverek kifejlesztését, kipróbálását vagy felhasználását, kereste az emberiséget megsemmisítéssel fenyegető nemzetközi feszültség enyhítésének módját.

Magyarországon az I. világháború előtti korszakban, és a háború utáni Horthy-időkben — gazdasági és politikai okokból — kevés matematikusi állás volt. Csakúgy, mint sok más világhírre született magyar matematikusnak, neki is külföldön kellett megélhetést találnia; először Berlinbe ment, majd ez vezetett 1926-ban a kőnigsbergi professzori katedrához.

Ez a rangos pozíció azonban a náci erők hatalomra jutásának áldozata lett. A békés, termékeny, tudománnyal foglalkozó évek véget értek. Veszélybe került az állása, saját, és feleségének, gyermekeinek élete, így ismét külföldre kényszerült. Ezúttal az Egyesült Államokba, mivel Magyarországon, vagy egyebütt, ahol személyes kapcsolatai voltak, nem várta semmilyen lehetőség.

A gazdasági depresszió és az Egyesült Államokban is növekvő antiszemitizmus nem tette könnyűvé számára (és sok más menekült számára sem) az átmenetet. Hírneve és személyisége — a St. Louis-i Washington Egyetemen — egy ideiglenes, a szokásos egyetemi költségvetésen kívüli álláshoz segítette. A szükséges anyagi fedezet nagy részét a helyi zsidó közösség biztosította.

Jelenléte és munkája nagyban hozzájárult az egyetem hírnevének növeléséhez, az egyetemnek nagy szüksége is volt egy ilyen kiemelkedő egyéniségre. Az, hogy az egyetem a későbbiekben kiváló matematikai központtá fejlődött, igen sokat köszönhet az általa ott eltöltött éveknek. Ebben az időszakban egy sor dolgozata jelent meg, valamint a gyorsan klasszikussá váló „Ortogonális Polinomok" c. könyve, melynek azóta négy kiadása, számos utánnyomása és orosz fordítása is megjelent.

1938-ban hívták meg a Stanford Egyetemre, ahol aztán az alkalmankénti utazásoktól eltekintve hátralevő éveit töltötte. Kihasználva a bővitési lehetőségeket, világhírű tudósokat hívott a tanszékre, elsőként tanárát, munkatársát és barátját, a Svájcban dolgozó magyar Pólya Györgyöt, majd Loewnert, Bergmant, Schiffert, és fiatalabb analistákat.

Tudományos termékenysége sohasem lankadt. Munkabírása tehetségéhez méltó. De távol állt attól, hogy csupán „matematikai gép" legyen. Szerény, jó humorú ember volt, odaadó családapa és barát, tartózkodó, de melegszívű ember, akivel öröm volt együtt lenni, segítőkész társ a bajban levőknek. Erős, de nem elnyomó egyéniség, személyes bájjal és széles műveltséggel.

Számára a matematika nem csak saját kutatásait jelentette. Idejével es tapasztalataival bőkezűen bánva kereste a fiatal tehetségeket, akikkel megosztotta tudását és akiket segített pályafutásuk során.

A klasszikus és modern szépirodalmat egyaránt alaposan ismerte, aggódott amiatt, hogy a humán műveltségben járatlan tudósok könnyen a demagógia kelepcéjébe eshetnek.

Soha nem hagyta abba a segélykérést az európai fasiszta vihar által hányatottak számára. A II. világháború utáni korszakban erkölcsi es anyagi támogatást nyújtott az amerikai McCarthyzmus áldozatainak. Felemelte szavát a híres uruguayi matematikus, Jose Louis Massera védelmében, aki ma tucatnyi tiszteletbeli doktori cím tulajdonosa, és akit az uruguayi katonai hunta közel tíz évig börtönben tartott.

Ellensége volt a faji és nemi megkülönböztetés minden formájának. Amikor a fekete matematikusokkal szemben az amerikai matematikai szervezetekben a korábban rutinszerűen alkalmazott diszkrimináció elleni első kampány megindult, azonnal a támogatók közé állt. Temérdek elfoglaltsága mellett is szakított időt arra, hogy egy számukra létesített főiskolán tanítson, segítse és bátorítsa a fekete hallgatókat.

Végrendeletében pénzt hagyományozott egy rasszizmus elleni szervezetre, és egy, a polgári szabadságot támogató amerikai szervezetre.

Elutasította a hidegháborút. Ellenezte a nukleáris fegyverkezést és az egész légkört, melyet fogadott hazájában a hidegháború eredményezett. Nem ő indította el a figyelmét megragadó nagy társadalmi kérdések miatti kampányokat. De sohasem rejtette véka alá nyílt erkölcsi és anyagi támogatását.

Soha nem felejtette el szülőhazáját. Gyakran meglátogatta, még végső betegségének hosszú, nehéz éveiben is. Munkássága végéig magyar folyóiratokban közölte számos kiváló dolgozatát.

Lefordította és kiadásra előkészítette Feldheim Ervin 1944. március 12-i jegyzeteit, amelyeket Szegő lábjegyzetét idézve „a fiatal és tehetséges magyar matematikus hagyott hátra néhány hónappal azelőtt, hogy a náci terror áldozata lett”.

Magyar matematikusokat hívott Stanfordba látogatóba, és minden módon állandó kapcsolatot tartott a magyar matematikai élettel és személyiségekkel.

Nagy elégedettséggel fogadta, amikor a MTA tagjává választották.

Élete végéig hűséges maradt a tudományhoz, a békéhez, az emberi értékekhez és barátaihoz. Szülővárosának, szülőhazájának, fogadott hazájának és a világ tudósainak minden okuk megvan a kitűnő tudós és nagyszerű ember ünneplésére. Dicsőséget hozott mindnyájukra.

Gratulálok Önöknek az ünnepség megszervezéséhez és köszönöm, hogy lélekben Önökkel lehetek ezen a napon.

Dept. of Maths. and Stats.
York University
North York, Ontario CANADA

SZEGŐ GÁBOR: 1895–1985*

RICHARD ASKEY ÉS PAUL NÉVAI

A nemzetközi matematikai közösség nemrég ünnepelte Szegő Gábor születésének 100. évfordulóját.

Szegő Gábor Kunhegyesen született, 1895. január 20-án, és Palo Altoban halt meg 1985. augusztus 7-én, kilencven éves korában. Szülei *Szegő Adolf* és *Neumann Hermina* voltak. Születését hivatalosan a Karcagi Rabbinikus Kerületben 1895. január 27-én anyakönyvezték. Egy körülbelül 9000 lakosú (Budapesttől kb. 150 kilométerre dél-keletre fekvő) magyar kisvárosból származott, és az 50.000 lakosú észak-kaliforniai városban halt meg, közel a Stanford egyetemhez, és csak néhány mérföldre a Szilikon Völgytől. Oly sok minden történt élete kilencven éve alatt, ami átformálta korunk politikáját, történelmét, gazdaságát, technológiáját, hogy nem csodálkozhatunk, ha Szegő élete sem a legrövidebb geodetikus vonalon ívelt Kunhegyesről Palo Altoba.

1950-ben találkoztam (R.A.) először Szegővel, amikor régi barátaihoz visszalátogatott St. Louisba, én pedig a Washington Egyetemen voltam oktató. Korábban, amikor egyetemista voltam ugyanitt, és első dolgozatomat írtam, felhasználtam *Hsien Yu Hsu* egy eredményét doktori téziseiből, melyet Szegő irányítása alatt készített. A hatvanas évek elején a Csikágói Egyetemen voltam, amikor Szegő odalátogatott. Még ma is magam előtt látom, ahogy ő és *Vági István*, egy felsőbb éves hallgató megindultak egymás felé a csarnok két ellentétes végéből, és mindketten magyarul kezdtek beszélni. Biztosan tudom, hogy korábban soha nem találkoztak, és azóta is fúrja az oldalamat a kiváncsiság, hogy hogyan ismerte fel benne Szegő a másik magyart. 1972-ben egy hónapot Budapesten töltöttem, és Szegő is ott volt. Majd minden nap találkoztunk, és bár egészsége megromlott, és memóriája sem volt a régi, rendkívül hasznos beszélgetéseket folytattunk. Három évvel korábban,

* Ez a dolgozat angolul a *Mathematical Intelligencer*ben jelent meg, és a folyóirat engedélyével itt közreadjuk a magyar fordítást. A magyar fordítás két szakaszt kihagyott az eredeti szövegből. Az egyik pont két bekezdésben a magyar személy és helységnevek helyes kiejtését magyarázza el az angol nyelvű olvasónak; a magyar olvasók ezt aligha igénylik. A másik az Appendix, amely az angol fordítása annak a jelentésnek, amit Riesz Frigyes írt Szegőről (magyarul) a Kőnig Gyula jutalom odaítélése alkalmából (*Mathematikai és Physikai Lapok*, **23** (1924), 1–60.), amely aztán újra nyomtatásba került Riesz Frigyes összegyűjtött Munkái II. kötetében magyarul is, és franciául is (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960, 1461-1466, ill. 1573-1576).

szintén Budapesten, Szegő figyelmembe ajánlotta két munkáját azzal, hogy érdemes lenne tanulmányoznom őket. Nem néztem meg a cikkeket rögtön, csak három hónap múlva. Az egyik egy olyan problémának a megoldását tartalmazta, amelyen már három éve hiába törtem a fejem. Szegő cikke 40 évvel korábban íródott. Ebből megtanultam, hogy ha egy nagy matematikus valamely méltánytalanul elhanyagolt munkáját tanulmányozásra ajánlja, akkor azt azonnal meg kell tenni.

Csak egyszer találkoztam (P.N.) Szegővel. Ez 1972-ben történt, akkor kaptam a diplomámat. Akkoriban Szegő már majdnem egy évtizede abbahagyta a matematikai kutatómunkát. Mégis, ő volt az a matematikus, aki két okból is a legnagyobb hatással volt matematikusi pályámra. Az egyik ok a *„Pólya–Szegő"*, azaz a *Pólya György* és *Szegő Gábor* által írt Feladatok és tételek az analízis köréből c. feladatgyüjtemény, amelyet nem nagyon kell bemutatni e cikk olvasóinak. A másik ok „a *Szegő*" volt, azaz, az *Orthogonal Polynomials* c. Szegő-monográfia, és benne az ortogonális polinomok modern elmélete, melynek Szegő az alapító atyja. Ha valóban pedánsak akarunk lenni, akkor ő inkább az alapító nagyapa, hiszen ma már a harmadik matematikus generáció munkálkodik ezen az elméleten. E könyvekről később még részletesebben is szó lesz. Napjainkban pedig különlegesen felemelő élményt szereztem, amikor erőfeszítéseim eredményeképp Kunhegyes, és Stanford is mellszobrot állított Szegőnek.

Távirati stílusban: Szegő Gábor emeritus professzor volt a Stanford Egyetemen. Tagjává választotta az Amerikai, a Bécsi a Magayar Tudományos Akadémia. A klasszikus analízis egyik legnagyobb huszadik századi alakja. Több mint 130 tudományos dolgozatot publikált, és szerzője illetve társszerzője négy nagy hatású, közülük két egészen rendkívülien sikeres könyvnek. Az analisták számára Szegő neve elsősorban a *Szegő-féle szélsőértékfeladathoz*, és a Toeplitz-mátrixokról szóló eredményéhez kötődik, amely aztán a *Szegő-féle reprodukáló magfüggvényhez* vezetett, ami viszont kiinduló pontja lett a *Szegő-féle határérték tételnek, az erős határértéktételnek*, az egységkörön vett *Szegő-féle ortogonális polinomok Szegő-elméletének*. Mindezeket összegezi *Orthogonal Polynomials* c. könyvében (Colloquium Publications, vol.23, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1939), és *Toeplitz Forms and Their Applications* című (Ulf Grenanderrel közösen írott) könyvében (University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1958). Az első az American Mathematical Society által publikált könyvek közül minden idők legsikeresebbike (négy kiadás, számos utánnyomás). A két kötetes *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis* című, 1925-ben Pólya Györggyel közösen írott könyvén matematikus generációk nőttek fel (angolul *Problems and Theorems in Analysis*, magyarul *Feladatok és tételek az analízis köréből* címmel jelent meg). Ezt a könyvet a Springer Verlag adta ki a *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete* (röviden a Grundlehren) sorozat 19. és 20. köteteként. Az *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* c. könyvet is Pólyával írta, ez a Princeton University Press kiadásában jelent meg (Princeton, 1951) az Annals of Mathematics Studies sorozat 27. köteteként (orosz nyelvre 1962-ben fordították). Lawrence E. Payne ezt írja a

Szegő összegyűjtött Munkái I. kötete 39. oldalán: „ez a könyv nem csupán hatékony, új matematikai eszközök sokaságát tette elérhetővé, de egy érdekes, új és gyümölcsöző kutatási területet nyitott." Szegő munkái, eredményei mélyen hatottak az elméleti és alkalmazott matematika fejlődésére, de emellett számos alkalmazásra leltek a statisztika, a fizika, a kémia, és a mérnöki tudomány különböző területein.

A következőkben Szegő életét és munkásságát ismertetjük annak alapján, ahogyan mi és számos más kortársa láttuk őt.

Az elemi iskolát Kunhegyesen végezte, majd miután a szolnoki gimnáziumban 1912. június 28-án érettségizett, a budapesti *Pázmány Péter* (ma *Eötvös Loránd*) *Tudományegyetemre* iratkozott be, ahol főképp matematikát és fizikát tanult. Ugyanebben az évben első díjat nyert a Mathematikai és Physikai Társulat tanulmányi versenyén (később Eötvös Verseny, ma Kürschák Verseny néven ismert). A verseny megnyerése nem múló esemény, sokkal inkább fontos mérföldkő Szegő életében. A verseny presztizse, mint azt a matematikai hajlamú magyarok mind jól tudják, igen magas volt akkoriban is. Különösen fontos volt Szegő számára, mert kétséges, hogy egy kapcsolatok nélküli zsidó családból származva tanulhatott volna, és megkaphatta volna azt a figyelmet, amit ezzel megszerzett. Szegő annyira fontosnak tartotta ezt a körülményt, hogy gyermekeinek is gondosan tudatába véste. Édesapja inkább lebeszélni próbálta az egyetemről, mert mint zsidónak, nem látott benne jövőt fia számára. A következő évben a folytonos függvények polinom approximációjával foglalkozó cikke az Egyetem díját nyerte el. Az approximáció-elméletet soha nem hagyta el, legutolsó tudományos dolgozata is e témával foglalkozik.

1913. és 1914. nyarát Németországban, a berlini illetve a göttingai egyetemen töltötte. Berlinben *Georg Ferdinand Frobenius, Hermann Amandus Schwarz, Konrad Knopp* előadásait hallgatta, és résztvett *Friedrich Schottky* szemináriumán is. Göttingában *David Hilbert, Edmund Landau* és honfitársa, *Haár Alfréd* tanítványa volt, aki abban az időben ott tanított. Az első világháború kitörésekor azonnal visszatért Magyarországra, és 1915. május 15-ig folytatta egyetemi tanulmányait. Folytak az összeírások, és Szegő tudta, hogy be fogják hívni az Osztrák-Magyar Monarchia hadseregébe. El akarta kerülni a gyalogságot, ahová besorozták volna, ezért vásárolt egy lovat, és bevonult a lovassághoz. Gyermekeinek megjegyzéseiből tudjuk, hogy nem volt valami kiváló lovas. Az utolsó háborús évet Bécsben töltötte. Katonai szolgálata még az osztrák-magyar kapituláció, 1918. november 11. után is folytatódott 1919 elején. Ekkor a gyalogságnál, a tüzérségnél és a légierőnél szolgált. Persze abban az időben a légiközlekedés katonai alkalmazásai nem voltak nagyon bonyolultak. Ám az Osztrák-Magyar légierőnek két kiemelkedő elméleti szakértője is volt: Kármán Tódor, és Richard von Mises, a modern aerodinamika két kimagasló tudós kifejlesztője. Mindketten Szegő életre szóló barátai lettek.

1912. és 1915. között Fejér Lipót, Beke Manó, Kürschák József, Bauer Mihály voltak professzorai. Ekkoriban találkozott későbbi barátjával, Pólya Györggyel (aki 97 évesen halt meg Palo Altoban, 1985. szeptember 7-én) és Fekete Mihállyal (aki a transzfinit átmérőről híres); Szegőt mindkettőjükhöz tartós munkakapcsolat fűzte.

Nemzetközi folyóiratban megjelent első dolgozatát, melyben egy Pólya által kitűzött feladatot oldott meg, az *Archiv der Mathematik und Physik* [**21** (1913), 291–292] közölte. Mint azt jól tudjuk, a matematikában különböző szintű problémák vannak. Az iskolai feladatoknak mindenki megtanulja a megoldását. Vannak aztán versenyfeladatok, mint például a Matematikai Olimpiák feladatai. Ezek jóval nehezebbek, és többnyire mélyebb megértést és ötletet igényelnek, mint amire első ránézésre gondolhatnánk. Az említett Pólya-féle feladat a nehezebbek közül való, és sok matematikus-palánta erejét tette próbára. Magyarországon régi hagyomány, hogy versenyfeladatokkal keltik fel a diákok érdeklődését a matematika iránt. Más országok is tanultak ebből a példából, és bevezették a matematikai feladatmegoldó versenyeket annak érdekében, hogy a tanulókat az átlagos iskolai követelményeknél keményebben meggondolkoztassák.

Első tudományos dolgozatát, amelynek címe *Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion* (Egy határértéktétel pozitív valós függvény Toeplitz-determinánsáról), a Mathematische Annalen publikálta [**76** (1915), p.490–503]. Erre Pólya így emlékezik vissza 1982-ben a Szegő összegyűjtött Munkái I. kötet 11. oldalán:

> „Együttműködésünk egy sejtésből indult ki, ami én találtam. Ez valamely $f(x)$ függvény Fourier-együtthatóival felírt determinánsra vonatkozott, amit Toeplitz és mások is vizsgáltak. Nem tudtam bizonyítani, de publikáltam a sejtést, és a fiatal Szegő bebizonyította. Jó példája ez két matematikus gyümölcsöző együttműködésének. A matematika tételeire gyakran, talán a legtöbb esetben, két lépésben találunk rá: először csak sejtjük az eredményt; aztán néhány perc, vagy óra, esetleg napok, hetek, hónapok, alkalmanként sok év után a bizonyítást is megtaláljuk. Nos, mint látjuk, a két lépést esetleg két különböző matematikus teszi meg."

Az ebben cikkében közölt eredmény további 45 éven át foglalkoztatta Szegőt, élesítette, kiterjesztette tételét, alkalmazásokat talált, és a Toeplitz-determinánsok elmélete egyik fő kutatási területe lett. Miközben katonai szolgálatát töltötte és egysége Bécsben állomásozott, 1918. július 8-án a Bécsi Egyetemen megszerezte a doktori (Ph.D.) fokozatot. Disszertációja a fentebb említett dolgozatán alapult. Ötven évvel később a doktorátus évfordulójának alkalmából a tiszteletére rendezett ünnepségre visszatért Bécsbe. Még most is emlékszem (R.A.), milyen örömmel beszélt nekem erről az eseményről néhány évvel később.

Lévén maga is matematikai csodagyerek, Szegő személye ideális választás volt arra, hogy foglalkozzék századunk egyik legnagyobb matematikai tehetségével, a gyermek Neumann Jánossal (született Budapesten, 1903-ban). Norman Macrae így ír erről „*John von Neumann*" című könyvében (Pantheon Books, New York, 1992., p.70):

> „Kürschák József professzor hamarosan írt egy egyetemi oktatónak, Szegő Gábornak, közölve, hogy az Evangélikus Gimnáziumnak van egy egészen kiemelkedő tehetséggel megáldott tanulója. Vállalná-e Szegő,

amint az a csodagyerekeknél magyar hagyomány, hogy egyetemi szinten foglalkozzon a fiúval?"

Szegő szerényen számolt be a történtekről. Azt írta, hogy hetente egyszer-kétszer elment Neumannékhoz, teázás közben halmazelméletről, mértékelméletről, és más témákról beszélgettek Jancsival, meg feladatokat adott föl neki. Más budapesti beszámolók drámaibbak voltak. Szegőné emlékei szerint férje könnyekkel a szemében tért haza a fiatal tehetséggel történt első találkozásról. Jancsinak a Szegő-feladatokra adott ragyogó megoldásai, melyeket apja bankjának levélpapírjára írt, ma is láthatók a budapesti Neumann-archivumban.

Miután leszerelt az osztrák-magyar hadseregből, Szegő 1919. május 22-én megnősült. Felesége Neményi Anna Erzsébet kémiából szerzett doktorátust a Pázmány Péter Tudományegyetemen. Szegő még egyenruhát viselt az esküvőn. Elmondások szerint a ceremónia alatt egy dunai hadihajó lőtte a várost. A házasságból két gyermek született, Péter 1925-ben Berlinben, és Veronika 1929-ben Kőnigsbergben. Péter a mérnöki hivatást választotta, számos dolgozatot írt a speciális függvények témakörében. San Jose-ban él, nyugdíjba vonult a Kaliforniai Állami Törvényhozásnál betöltött állásából. Veronika 1954. óta Dél-Kaliforniában él, 1995-ben ment nyugdíjba mint a University of Southern California pénzügyi és tervezési igazgatója. Most Palo Altoban él, és három gyermek, Steven, Emily és Russel édesanyja. Emilynek egy fia van, Nathan, és Russelnak egy leánya, Micaela.

Szegőék boldog házasságban éltek, mígnem Anna 1968-ban sok évi szenvedés után meghalt. Ezt követően Szegő 1972-ben Budapesten feleségül vette Vajda Irént, aki 1982-ben halt meg, Budapesten.

A forradalom, ellen-forradalom, az I. világháborút követő antiszemita diszkrimináció zavaros éveiben (a politika szótár szerint ebben Károlyi Mihály = centrum, Kun Béla = bal oldal, Horthy Miklós = jobb oldal) igen korlátozott számban voltak csak tudósi állások Magyarországon. Ennek eredményeképp igen sok magyar tudós, különösen akiket megbízhatatlan elemekként megcímkéztek saját hazájukban, elhagyta az országot és elsősorban Németországban, Svájcban, az Egyesült Királyságban, és egy évtizeddel később az Egyesült Államokban keresett megélhetést, ahol aztán sokkal méltóbb tudományos és anyagi megbecsülést kaptak, mint amire Magyarországon valaha is reményük lehetett. 1919-ben és 1920-ban egy rövid ideig Szegő Kürschák József tanársegéde volt a Budapesti Műegyetemen. Miután az egyetemen nem dolgozhatott tovább, Neumann János apja, Neumann Miksa segítette Szegőt. Feladva minden reményt arra, hogy Magyarországon egy elfogadható megélhetést biztosító állást találjon, 1921-ben Berlinbe költözött, ahol *Issai Schur* barátja és kollégája lett, és *Leon Lichtenstein, von Mises, Erhard Schmidt* voltak munkatársai. Az ortogonális polinomsorok és a trigonometrikus Fourier-sorok ekvikonvergenciájára vonatkozó eredményei alapján 1921-ben habilitált, és 1921. májusában a Berlini Egyetem magántanára lett. Ennek alapján joga volt előadásokat tartani, de érte igen csekély ellenszolgáltatásban részesülhetett. Ugyanilyen címet kapott a 20-as évek Berlini Egyetemén *Stefan Bergman, Salomon Bochner,* *Eberhard Hopf, Heinz Hopf, Karl Löwner és Neumann János.* 1925-től az alkalmazott matematika tanszék vezetője volt, de ez is csupán kinevezés nélküli rendkívüli professzúrát jelentett. Amikor Szegő elhagyta Berlint, ebben a pozícióban *Adolf Hammerstein* (1888–1941) lett az utóda 1927-től 1935-ig. Mint érdekességet jegyezzük meg e ponton, hogy 1984-ben a klasszikus komplex analízis leghíresebb megoldatlan problémája, a *Bieberbach-sejtés* igazolásához *Louis de Branges* a *Milin–Lebedev* és *Askey–Gasper* eredmények mellett Lőwner ezen berlini éveiből származó tételeit használta fel. Szegő fentebb említett dolgozatát a Mathematische Zeitschrift közölte [**12** (1922), p.61–94.]. Ugyanebben az időben Szegőtől függetlenül két berlini kollégája, Bergman és Bochner egy másik szempontból közelítve meg a problémát, szintén kidolgozták az ortogonális függvények elméletét. Ebben az időszakban Szegő Lichtensteinek is segített a *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik* szerkesztésében.

Berlini tartózkodása idején, 1924. április 10-én az *Eötvös Loránd Mathematikai és Physikai Társulat* a *Kőnig Gyula* Díjjal tüntette ki Szegőt. A díjról döntő bizottság elnöke *Kürschák József*, tagjai *Farkas Gyula, Kőnig Dénes* és *Riesz Frigyes* voltak. Riesz Frigyest kérték fel arra, hogy a jutalmazott munkásságát ismertesse. Riesz beszámolója megjelent a *Mathematikai és Physikai Lapokban* [**23** (1924), p.1–6.], és később újra megjelent magyarul (p. 1461–1466) és francia fordításban is (p. 1573–1576) Riesz összegyűjtött Munkáinak II. kötetében (Akadémiai Kiadó, 1960.). A Riesz-ismertető Szegő Gábor munkáira vonatkozó lelkes gondolatait igen tanulságos olvasmányként ajánlhatjuk a matematika iránt érdeklődő olvasók számára.

A matematikusok általánosan egyetértenek abban, hogy a „Pólya–Szegő" két kötete a legjobban megírt és a leghasznosabb feladatgyüjtemény, amit valaha is produkáltak a matematika története során. Az első kiadás óta eltelt hetven évben folyamatosan segítette a matematikai kutatást, és óriási hatással volt fiatal matematikusok generációinak képzésében. Eddig négy német, egy angol, egy magyar, és három orosz kiadásban jelent meg. Mindkét szerző abban hisz, hogy a matematikát csak aktív matematizálás közben lehet megtanulni. Ez a könyv úgy vezeti be az olvasót a matematikai kutatásokba, hogy gondosan kiválogatott és egymáshoz kapcsolódó feladat-sorozatokat old meg, és ezen feladatcsoportok megoldása és analizálása után az olvasó szinte készen áll az adott témakör önálló kutatására. Bár címe szerint a könyv az analízisről szól, és valóban, a feladatok nagyrészt e területről valók, változatos feladatok találhatók a számelmélet, a kombinatorika, a geometria és egyes fizikai alkalmazások területéről is. A feladatok megválasztása egyként igazolja a szerzők kifinomult izlését, matematikai eleganciáját, és technikai eszköztárát. Szinte minden oldal kínál valami váratlant, legyen az egy elegáns gondolatmenet, egy szokatlanul ravasz bizonyítás, vagy egy különálló probléma, amelyből a szemünk előtt bontakozik ki egy összetett elmélet.

Pólya így ír a „Pólya–Szegő" születéséről a Szegő Összegyűjtött Művei I. kötet 11. oldalán:

„Nem emlékszem, mikor és hogyan bukkant fel a könyv terve; de biztos, hogy évekig dolgoztunk ezen a könyvön, míg 1925-ben a két kötet megjelent.

Csodálatos időszak volt, óriási lelkesedéssel és odafigyeléssel dolgoztunk. Hasonló volt a hátterünk. Mindkettőnkre — mint minden akkori fiatal magyar matematikusra — nagy hatással volt Fejér Lipót. Mindketten olvasói voltunk a kitűnő szerkesztésű magyar Középiskolai Matematikai Lapoknak, amely a feladatmegoldásra tette a hangsúlyt. Azonos témák, azonos problémák érdekeltek minket, de egyikünk itt, másikunk ott volt járatosabb. Remek együttműködés volt. Ennek eredménye, a Pólya–Szegő könyv a legjobb munkám, és Szegőnek is a legjobb munkája."

A könyv színvonalát illetően Pólya értékítéletével nem nagyon lehet vitatkozni. Mércét állítottak a későbbi feladatgyűjtemények írói elé, de Pólya és Szegő szintjét azóta sem tudta senki még csak meg sem közelíteni. Szegő mindig nagyon szerényen nyilatkozott a Pólya–Szegő könyvön végzett közös munkáról. Mindig azt hangsúlyozta, hogy Pólyától származott a könyv ötlete és megtervezése, amelyet aztán közös erőfeszítéssel dolgoztak ki.

1926-ban Szegő meghívást kapott a Kőnigsbergi Egyetemre, ahol Knopp utódjaként mint rendes egyetemi tanár dolgozott 1934-ig. Az első két doktorandusz tanítványa itt szerzett fokozatot. Kőnigsbergi éveiről szóló egyik kedvenc története Hilbert 1930-as látogatásához kapcsolódik. Hilbertet díszpolgárává választotta Kőnigsberg városa. Az időjárás nem volt kegyes a látogatóhoz, aki a rendkívül hideg őszi időhöz alkalmatlan öltözékben jelent meg. Szegő segítette ki Hilbertet egy kölcsönadott nagykabáttal, hogy szülővárosa üdvözölhesse a vendéget.

Zsidó család lévén Szegőék helyzete egyre nehezebbé vált a harmincas évek Németországában. Szegőt szinte utóljára érintette a fenyegetés, részben első világháborús szolgálata miatt, és mert annyira szerették és tisztelték őt tanítványai és munkatársai. Pólya így írt *Jacob David Tamarkinnak* 1934. február 14-én:

> „Nagyon nehéz volt írnom a fő gondomról, és ez Szegő sorsa. Rövid leszek és egyszerű. Borzasztóan aggódom miatta. Decemberben találkoztam a feleségével. Szegőtől január elején kaptam levelet; bár semmilyen hivatalos lépést nem tettek ellene (január elejéig), és a diákokkal sem volt semmilyen közvetlen összeütközése, nem látom, hogyan folytatódhat mindez az ottani körülmények között. Úgy tudom, minden ajánlatot elfogadna, akár egy rövid 1 vagy 2 évre szólót is. Megpróbálna szabadságot kérni erre az időszakra, hogy lássa, elégséges-e a keresete a megélhetéshez. Fejér is, és maga Szegő is azt mondja, hogy Magyarországon semmi remény nincs arra, hogy állást találjon. Én sem tudtam semmit tenni érte itt Svájcban. Bocsássa meg ezt a levelet, de mint látja, nagyon aggódom. Az egész európai helyzet nagyon sötét."

Tamarkin azonnal munkához látott, hogy Szegő számára állást találjon az Egyesült Államokban (v.ö. Szegő Összegyűjtött Művei I. kötet 2. oldallal). Nyilvánvaló, hogy ez a feladat nem volt egyszerű a harmincas évek közepén, a Nagy Válság időszakában; akkoriban állást találni még az amerikai matematikusok számára is a lehetetlenséggel volt határos. A legtöbb szóbajövő állás magas oktatói terheléssel, és gyenge fizetéssel járt (a heti 12, egyes esetekben még több óra egyáltalán nem volt kivételes, és az évi 3000 dollár már jó fizetésnek számított). Kevésbé közismert, hogy a harmincas években a zsidókat az Egyesült Államokban sem látták szívesen. Úgy érezték, hogy az USA nem képes a közelgő holocaust elől menekülni próbáló zsidóknak mind menedéket adni, és sok hivatalos személy láthatóan közömbös maradt ez ügyben. Szerencsére, és ez elsősorban az amerikai matematikusok fáradhatatlan támogatásának köszönhető, számos zsidó matematikusnak sikerült az Egyesült Államokba telepedni ebben az időben. Ez a tény jelentős szerepet játszott az USA matematikájának fejlődésében. Ennek az időszaknak a jobb megértésére javasoljuk a Peter Duren szerkesztésében megjelent „*A Century of Mathematics in America*" (American Mathematical Society, 1968.) c. könyv első kötetének tanulmányozását, különösen ajánlható *Lipman Bers* cikke: *The European Mathematicians' Migration to America* (p. 231–243), és Nathan Reingold cikke: Refugee Mathematicians in the United States of America, 1933-1941: Reception and Reaction (p. 175–200).

1934. májusában a pünkösdi szünet alatt Szegő Koppenhágába ment, hogy jövőjéről *Harald Bohrral* tanácskozzon. Kihasználva, hogy ez alkalommal a német cenzurától nem kellett tartania, levelet írt Tamarkinnak. E ponton kell megjegyeznünk, hogy a Dartmouth College még 1925-ben meghívta Szegőt egy vendégoktatói állásra. Szegőék gondosan mérlegelték ezt az ajánlatot, és végül is nem fogadták el, mert akkor még a jövő biztosabbnak látszott Németországban. Szegő viszont akkor Tamarkint ajánlotta az állás betöltésére. Igy aztán nem meglepő, hogy később Szegő Tamarkinhoz fordult segítségért, és szoros barátságuk egészen Tamarkin 1945-ben bekövetkezett haláláig fennmaradt. A német nyelven írt levél megjelent a Szegő Összegyűjtött Munkái I. kötet 3–6. oldalán.

E levélben Szegő leírja családja jövőjével és kortársaival kapcsolatos érzéseit. Úgy tűnik fel, hogy nem volt tudatában, vagy inkább nem hitte el, mennyire súlyos volt a helyzet, sokkalta súlyosabb, mint kezdetben gondolta. Az életük forgott veszélyben. Carl de Boor fordította a német levelet angolra, és véleménye szerint Szegő német stílusa oly kiváló, hogy aligha lehetett angolban visszaadni. Itélje meg az olvasó...

„Koppenhága, 1934. május 23.

Kedves Tamarkin Úr!

Már egy ideje tervezgetem a levélírást, hogy szívből jövő köszönetet mondjak önnek és Richardson professzornak az érdekemben tett erőfeszítésekért. Kérem, bocsássa meg, hogy megintcsak németül írok, könnyebben és pontosabban tudom így magam kifejezni. Nagyon remélem, hogy levelem olvasása nem fog a nyelv miatt nehézséget okozni.

Kihasználva a pünkösdi szünetet, néhány napra átjöttem Koppenhágába. Rövidesen rá is térek, hogy mi késztetett erre az utazásra. A jobb érthetőség kedvéért azonban azzal kezdem, hogy röviden leírom a helyzetemet nagyjából a múlt nyártól indulva, amikor utoljára leveleztünk ezekről a kérdésekről. Azidő óta személyemet érintően látszólag semmi lényeges változás nem történt. Kollégáim is és a diákok is korrekt módon bántak velem, és függetlenül a jelenlegi politikai szenvedélyektől, elviselhetően. Mindazonáltal a helyzetem természetszerűleg továbbra is nagyon nehéz, sok esetben igen elkeserítő és fenyegető. Legjobban nyomaszt a családom miatti aggodalom, különösen gyermekeim neveltetése és jövője. Kilenc éves fiunkat már a múlt őszön Svájcba küldtük, hogy távoltartsuk a iskola politikával fűtött légkörétől és a németországi élettől, ott gondját viselik testileg és lelkileg. Pár napja, hogy velünk tölti a nyári vakációt, és így világosan felmérhettük, mekkora előnnyel jár az ottani tartózkodása. De ez a helyzet mégsem tartható fenn sokáig. Először is, a gyermeknek hiányzik a szülői otthon (és viszont), másodszor, anyagilag sem győzhetjük soká, különösen ha figyelembe vesszük a növekvő gazdasági nehézségeket Németországban. Ez még akkor is így lenne, ha minden várakozás ellenére megváltozna a kormány általános politikája, a változás aligha lehet elég radikális ahhoz, hogy a faji és egyéb előítéleteket az elviselhető minimumra visszaszorítsa.

Gyermekeim jelenével és jövőjével kapcsolatos mindezen nehézségeket tovább súlyosbítja, hogy egyáltalán nem hiszek saját helyzetem szilárdságában. A múlt nyáron sokat beszélgettünk Fejérrel ezekről a dolgokról, melyeket párhuzamosnak tekinthetünk (ahogy mi látjuk) a magyarországi hasonló fejleményekkel. Egyes jóslatokat már megcáfoltak az események. Németországban az új „világnézet" irányvonalát oly eltökéltséggel tartják fenn, hogy a közeljövőben változás, kompromisszum, vagy akár csak némi csillapodás sem várható. Természetesen vannak árnyalatok és különbségek a vezető körök vérmérsékletében, és lehetetlen megjósolni, hogy mely erők lesznek végül is győztesek. Például, a Birodalmi Kulturális Minisztérium újabb összetételében úgy látszik, a jobbik szellem kerekedett felül (ez oly változás, mely kulcsfontosságú az egyetemeket érintő személyi kérdésekben). De még így is hangoztatnak afféle „megnyugtató" szavakat, hogy öt éven belül egyetlen nem-árja sem vezethet egyetemi tanszéket. Fel kell figyelnünk a sok újabb nyugdíjazásra, amit gyakran nem a rendes eljárás szerint hajtanak végre (pl. Rademacher esetében ez év februárjában), és az olyan nyugdíjazásokra is, amelyeket az adminisztratív egyszerűsítés érdekében csinálnak, valójában azzal a rejtett céllal, hogy megszabaduljanak olyan nemkivánatos személyektől, akiket egyébként védene a „Beamtengesetz" (a Német Polgári Szolgálat visszaállítására vonatkozó Törvénynek nevezhetnénk). Csupán néhány hete történt, hogy egy kiváló klasszika-filológust így távolítottak el az egyetemről. A matematikát illetően Kőnigsbergben a következő a helyzet. Reidemeistert áthelyezték, és még senkit sem neveztek ki a helyébe. Ez azt jelenti, hogy egyelőre szükség van rám, mivel egyedül én vagyok felelős pozícióban. Ám mihelyt az utód megérkezik, ami inkább hamarabb, mint későbbre várható (valószínűleg őszre itt lesz), nem hiszem, hogy utána sokáig itt maradhatok, bár mint fronton szolgált tisztet, engem elvben nem érintene a törvény. A múlt nyári általános vélekedés szerint a „Beamtengesetz" mindenképp ideiglenes kell legyen, és előbb-utóbb a korábbi törvényes biztonság helyreáll. Azóta már kétszer kiterjesztették a törényt, és semmi nem akadályozza a további kiterjesztéseket, akár a végtelenségig. Ráadásul, ha el is törölnék ezt a törvényt, még mindig ezer módja maradna annak, hogy lehetetlenné tegyék itteni működésemet. Az efféle törvényeket sokkal könnyebben cserégetik, mint mondjuk egy matematikus áttérne az egyik axiómarendszerről a másikra.

Még egy idevágó tény érdemel hangsúlyt. Kőnigsberget félhivatalosan Birodalmi Egyetemként emlegetik, ami azt jelenti, hogy a jövőben csak politikailag elfogadható személyek fognak itt dolgozni. Igy aztán szinte lehetetlen, hogy itt maradjak a végleges berendezkedés során, ami a minisztérium felállítása miatt őszre várható. Ha nem küldenek rögtön nyugdíjba, akkor áthelyeznek egy másik egyetemre. Korábban ez elképzelhetetlen volt németországi egyetemi tanárok esetében; ma pedig a „törvény" adja meg hozzá az eszközt. Nos, mit várhatok jövendőbeni kollégáimtól és diákjaimtól az új környezetben, amely bizonyára kezdettől fogva rosszindulatú lesz irányomban? Valószínűleg csak egy olyan személyt fognak bennem látni, akit büntetésből áthelyeztek, nemigen fognak enyhítő körülményeket keresni, amiket itt Kőnigsbergben megszoktam, ahol még abból az időből ismernek, amikor még a megítélésnek objektív alapja volt, és most a „vannak tisztességes zsidók is, ritka kivételként" jelszóval korrektül viselkednek velem.

Összefoglalva, gyermekeim szempontjából a helyzet egyformán rossz mind a jelen, mind a jövő tekintetében, de az én saját jövőm is teljesen bizonytalan. Ezen okokból, tavalyi levélváltásunk óta folyamatosan gondolkodom azon, hogy a USA-ba költözzem. A fentebbiekben ecsetelt eléggé reménytelen helyzetem ellenére sem szeretnék kapkodva cselekedni; egy pillanatra sem felejtettem el az odaát meglevő nehézségeket, melyek volt szíves nekem és barátaimnak, Fejérnek és Pólyának leírni. Ezért aztán Fejérrel és Pólyával arra következtetésre jutottunk, hogy továbbra is állást keresek az USÁ-ban, de siker esetén — amin 1–2 évre szóló meghívás értendő (v.ö. a múlt évi Válság Bizottság útmutatásaival, amelyről ön írt nekem) — megpróbálok először innen ideiglenes eltávozást kérni, hogy ne égessek fel minden hidat.

Ennek értelmében történt, hogy Pólyát egy önnek szóló levél megírására kértem. Ez év április 7-én említette az ön válaszát, és a húsz érdeklődő levél eredményét is. Őszintén meghatott ez a meg nem érdemelt mértékű segítőkészség! Továbbá arra is kért, hogy rajta keresztül tudassam önnel pontos elképzeléseimet, mert önnek gyorsan és határozottan kell cselekednie. Hogy világos legyen a dolog, most újra leírom, bár ön már biztosan megkapta ezt a választ egy ideje. Tehát az elképzeléseim:
az A) esetben azaz
1) ha a szóbanforgó ajánlat biztosan érvényes 2–3 évre, és van remény a meghosszabításra,
2) családommal meg tudok belőle élni,
akkor biztosan elfogadom az ajánlatot. Azonban a B) esetben, azaz ha fenti feltételek csak részben teljesülnek, akkor ideiglenes távozást kérvényezek, és további

döntést akkor hozok, ha megkaptam a szabadságot. Persze, az A) esetben is formálisan ilyen engedélyt fogok kérni, csakhogy akkor annak nem volna oly nagy jelentősége, mint a B) esetben.

Az ön levelére hivatkozva Fejér azt írta a május 9-i levelében, hogy a St. Louisbeli Washington Egyetem 3–4 évre szóló vendégprofesszori állás felajánlását fontolgatja, feltéve, hogy meg tudják szerezni hozzá a szükséges anyagiakat, ami valószínűleg még most sem bizonyos. Azt is írja, hogy a továbblépés érdekében ön tudni szeretné, hogy egy hivatalos meghívás esetén megkapom-e az egyetememtől a szabadságot. Erre azonnal válaszoltam volna neki, vagy önnek, ha nem jött volna közben egy levél Bohr-tól is (amit eredetileg félreértettem túl cikornyás formája miatt), továbbá, még Courant is írt Cambridge-ből, és aztán még egy levelezőlap is jött Bohrtól. Mindezek Amerikából jövő kérdésekre vonatkoztak, részben az Amerikai Egyetemek Szövetségétől, részben a Rockefeller Alapítványtól. Felteszem persze, hogy ezek az ön segítő munkálkodásának következményei. Mivel igen nehéz e dolgokról Németországból levelezni, és a pünkösdi szünet épp küszöbön állt, úgy döntöttem, hogy Koppenhágába jövök, hogy személyesen beszéljek Bohrral. Most itt vagyok nála, és éjjel-nappal a helyzetet elemezzük. Volt oly kedves, és megmutatta Richardson levelét is; mellesleg két napja egy táviratban jelezte neki, hogy itt vagyok, és a válaszlevél megy neki. Mindezek az események magyarázzák az én kissé elkésett válaszomat, de ami reményeim szerint sokkal világosabb, mint amit Németországból írhattam volna. Kérem az ön és Richardson professzor elnézését, ha ez a késedelem egyes lépéseik elhalasztását okozta.

Néhány nappal indulásom előtt felkerestem a Kőnigsbergi Egyetem kurátorát, aki közvetít az egyetem és felsőbb művelődési hivatalok között. Barátságos, jóindulatú, nagyon tisztességes ember még a régi iskolából, úgy gondolom, bízhatom benne. Nem mondtam el persze, hogy szándékomban áll végleg elmenni, megemlítettem a St. Louisi látogatás lehetőségét, amelynek megvalósulása nagyban függhet attól, hogy kapok-e hivatalos szabadságot. Megkérdeztem, hogy lehetségesnek tart-e egy ilyen engedélyt, feltéve, hogy a hivatalos meghívót mellékelve folyamodom érte. Természetesen igen óvatos választ adott, de mindent összevetve inkább pozitívan, mint negatívan ítélte meg a szabadság lehetőségét. Megegyeztünk, hogy a minisztérium megfelelő hivatalában privát módon érdeklődik, és tudatja velem az eredményt. Akkor nyújthatom be a kérvényt, ha a hivatalos meghívó már a kezemben van.

Arra kérem mostmár, kedves Tamarkin Úr, hogy válaszomat úgy értelmezze, és a megfelelő embereket erről úgy is informálja, mintha a hivatalos szabadságom lehetősége teljesen el lenne intézve. Ami azt illeti, én magam is nagyon valószínűnek tekintem. Sőt egy lépéssel továbbmegyek. Mivel a St.Louisi ügyben az A1) feltétel biztosítva látszik, az itteni szabadság-engedélytől függetlenül mindeképpen elfogadom a meghívást, ha A2) is teljesíthető. Erről azonban igen kevéssé vagyok informálva, sejtelmem sincs, hogy mekkora összeg elég ahhoz, hogy egy egyetemi tanár ne haljon éhen a családjával. Nincs szándékomban semmiféle különleges követelést támasztani. Az összehasonlítás kedvéért megemlítem, hogy a jelenlegi évi fizetésem 9000 márka körül van, amely azonban a bizonytalan helyzet miatt várhatóan veszíteni fog értékéből. Ám alig hiszem, hogy értelme lenne ezt amerikai pénzre átszámítani, különösen a leértékelés miatt. Mindenesetre nagyon hálás lennék, ha tudna némi felvilágosítást adni e tekintetben. St. Louisról magáról nem sokat derítettem itt ki: 800.000 lakosú iparváros New Yorktól 1400 kilométerre, több egyeteme van, és a számomra szóbajövő jól ellátottnak és felszereltnek tűnik (v.ö. American Universities and Colleges, 2. kiadás, American Council on Education, Baltimore 1932.), azonban az ottani matematikusok ismeretlenek számomra. Ez egyébként egyáltalán nem zavarna engem. De nagyon értékes volna számomra, ha többet is megtudhatnék öntől a városról, az egyetemről, a klímáról, a lakhatási lehetőségekről és az életszínvonalról. Felteszem, hogy hallomásbeli értesülés, vagy esetleg személyes tapasztalat alapján tudhat nekem erről valamit mondani.

Még egy nagyon fontos dolgot bátorkodom hangsúlyozni. 1 évnél hosszabb szabadságot jelenleg nem remélhetek. (A hosszabbítást később kérvényezhetem.) Másrészt, nem nagyon kérvényezhetek 1 éves szabadságot 3–4 évre szóló meghívóval, amiről Fejér tudósított, bármennyire is értékes legyen az nekem. Ha valóban erre szól a meghívásom, azzal a nagy és fontos kéréssel fordulok önhöz, informálja az illetékes hivatalt a helyzetemről arra kérve őket, hogy a személyes használatomra alkalmas 3-4 évre szóló meghívás mellett küldjenek egy hivatalosan felhasználható meghívó levelet is, amelyben csupán 1 éves időtartam van említve. Remélem, sikerült teljesen világosan kifejeznem magam e különös pontra vonatkozóan.

Ne legyen meglepve, ha rövidesen kézhez kap tőlem egy angolul írt dolgozatot. Walsh professzorral leveleztem egy bizonyos kérdésben, és aztán az eredményeimet angolul írtam le. Arra kért, hogy küldjem el neki a dolgozatot, ő pedig az én kérésemre tovább küldi önnek és Hille professzornak. Remélem, hogy a kézirat nem lesz olyan siralmas, mint amikor a japánok írnak németül. Mellesleg, szorgalmasan tanulom az angolt, és remélem, hogy gyorsan elsajátítom az előadás (ha nem is a mindennapi beszélgetés) művészetét, mihelyt alkalmam nyílik angol nyelvű előadások hallgatására és tartására. Hogy ne okozzunk túl nagy csalódást a St.Louisi uraknak, talán tanácsos lenne alkalomadtán megemlíteni nekik, hogy e területen még hiányos a képzettségem.

Most már zárom levelemet, miután úgy remélem, a lényeges pontokat sikerült világosan kifejtenem. Ismételten a legforróbb köszönetemet küldöm önnek és Richardson professzornak, maradok szívélyes üdvözlettel
őszinte híve
Szegő Gábor"

Ugyanekkor Harald Bohr is levelet írt Tamarkinnak, amelyben elmagyarázta, hogy Szegő helyzete Németországban sokkalta nehezebb és reménytelenebb, mint azt maga Szegő hajlandó lenne elhinni: „helyzete még annál is elviselhetetlenebb, mint azt ő maga képzeli". Leírja azt a tényt is, hogy „Szegő csak azért volt képes mostanáig fenntartani pozícióját, mert egészen különleges a helyzete a diákok között, ugyanis nem csupán elsőrangú matematikus, de egy rendkívül nagyra becsült, magávalragadóan sikeres tanár." H. Bohr levele újra megjelent a Szegő Összegyűjtött Munkái I. kötet 2–3. oldalán.

Tamarkin erőfeszítéseit siker koronázta, és 1934-ben Szegő megkapta a professzori meghívást a Washington Egyetemre (St.Louis, Missouri). Gazdaságilag és politikailag is rendkívüli idők jártak. A szoros költségvetés miatt az egyetem nem tudta biztosítani Szegő fizetését. A szükséges pénz előteremtéséhez hozzájárult a Rockefeller Alapítvány 4000 dollárja, az Elbocsátott Német Tanárokat Segélyező Szükségbizottság egy hasonló mértékű támogatása, és a helyi zsidó közössége adománya, amelyek együttesen már fedezni tudták Szegő négy éves fizetését. A Rockefeller Alapítvány közvetlenül is segített vizumok, kiutazási engedélyek, úti és egyéb okmányok beszerzésében.

Pólya és H. Bohr tanácsát követve Szegő elfogadta az ajánlatot, 1934. őszén St. Louisba ment, és 1938. júniusáig maradt ott. Ezen időszak alatt öt doktorandusz tanítványa volt (egyikük csak 1948-ban szerzett fokozatot Stanfordban), és befejezte Orthogonal Polynomials c. könyvének első változatát. 1935. nyarán a Stanford Egyetemre látogatott vendégoktatói meghívás alapján. 1936-ban meghívott előadó volt az Amerikai Matematikai Társulat konferenciáján. A St. Louis-ban kötött barátságok és kapcsolatak élete végéig kitartottak.

Az Orthogonal Polynomials első kiadása 1939-ben jelent meg, és azóta a fő hivatkozása lett sok elméleti és alkalmazott matematikusnak, és más, különböző területeken dolgozó tudósnak. Több oka is van annak, amiért a kutatók az ortogonális polinomokat tanulmányozni kezdték. Történetileg ezek a polinomok a speciális függvényekkel kapcsolatban jelentek meg a numerikus analízis és az approximációelmélet (kvadratúra és interpoláció) kérdéseiben. Lánctörtek számlálójában és nevezőjében is megtalálhatók. A későbbiekben a Padé-approximációban és a momentum-problémában is előbukkantak.

Ám az ortogonális polinomok aszimptotikus elméletének alapjait Szegő fektette le a huszas és harmincas években írt dolgozataiban. Szegőnek sikerült az ortogonális polinomokra vonatkozó számos jelentős problémát bizonyos Toeplitz- és Hankel-determinánsok aszimptotikus viselkedésére redukálnia. Ez a zseniális módszer sok probléma megoldását tette könnyűvé, legalábbis az ú.n. *Szegő-osztály* esetében, azaz olyan mértékekre, amelyek abszolut folytonos komponensének a logaritmusa Lebesgue-integrálható az egységkörön. Sok matematikus munkája járult hozzá a *Szegő-elmélet* kiépítéséhez, mint például *Naum I. Akhiezer, Sergey N. Berstein, Erdős Pál, Freud Géza, Yakov L. Geronimus, Alexander N. Kolmogorov, Mark G. Krein, James Alexander Shohat, Vladimir I. Szmirnov, Turán Pál*, hogy csak néhány nevet említsünk. A Szegő-elmélet jelentős alkalmazásokra lelt más területeken is, mint a numerikus módszerek, direkt és inverz diszkrét szóráselmélet, differenciál- és differenciaegyenletek, matematikai statisztika, predikcióelmélet, statisztikus fizika, rendszerelmélet, kódelmélet és fraktálok. Az ortogonális polinomok Szegő-osztályon túli elméletét csak újabban fedezték fel. Az ortogonális polinomok iránti újraéledő érdeklődés egyik fő oka a sokféle rekurzív egyenlet, amit ezek a polinomk kielégítenek. Szegő *Ortogonális Polinomok* című könyve azért oly népszerü mindmáig, mert ezen polinomok elméletének szinte minden aspektusát tárgyalja, olyan területeket is, amelyek (gyakran épp a könyv inspirációjára) később épültek ki. Azóta sok igen jól megírt könyv jelent meg az ortogonális polinomokról, mégis Szegő könyve marad a mérce, az első hely, ahová ötletekért és információért fordulunk.

1938-ban a Stanford Egyetem a Matematikai Intézet vezetését kínálta fel Szegőnek, és ő 1953-ig maradt ebben az pozícióban. Ez időszakban szerzett legnagyobb érdeme, hogy az intézetet világszínvonalúvá fejlesztette. E ponton átadjuk a tollat Lax Péternek, és idézünk „*The old days*" c. cikkéből, amely az „*A Century of Mathematical Meetings*" c. kötetben (szerk. Bettye Ann Case, Amer. Math. Soc.,1996) jelenik meg.

„A negyvenes és ötvenes években többször is a Stanford Egyetemen töltöttem a nyarat a Matematikai Intézet vezetője, Szegő Gábor meghívására, aki házassága révén nagybátyám volt. Egy intézeti főnök akkoriban sokkal nagyobb hatalmú személy volt, mint manapság; ő hozta meg a döntéseket, beleértve az alkalmazásokat és felmentéseket is. Szegő arra használta a hatalmát, hogy a korábban Blickfeld illetve Uspensky (mindketten figyelemreméltó matematikusok) által irányított intézetet az ország vezető matematikai intézetévé fejlessze, azzá, amit ma Stanford neve jelent. Négy vezető matematikust alkalmazott Európából, ezek Pólya, Loewner, Max M. Schiffer (aki később átvette az intézet igazgatását) és Bergman voltak, és vagy egy féltucat ragyogó képességű fiatal amerikait, mint (Richard) Bellman, (Albert Hosmer) Bowker, (Paul) Garabedian, (Halsey) Royden, (Albert Charles) Schaeffer, (Donald C.) Spencer. Kihasználta azt a támogatást, amelyet a kormány a háború után nyújtott a tudománynak, és Bowkerral létrehozták az Alkalmazott Matematikai és Statisztikai Laboratóriumot."

A stanfordi Szegő-periodust jól dokumentálja Royden cikke: „*A History of Mathematics at Stanford*", mely „*A Century of Mathematics in America*" II. kötete 237–277 oldalán található (kiadta az AMS, 1989.), és a cikk utáni hivatkozások jegyzéke.

„Első cikkét Szegő 20 évesen írta, az első világháború lövészárkaiban. Akkori bajtársa, és későbbi életreszóló barátja, Strasser visszaemlékezése szerint tiszt-társai felismerték, hogy Szegő mily értékes tehetség, és mindent elkövettek azért, hogy minél kisebb veszélynek legyen kitéve.

A fiatal Szegő nagyon szégyenlős volt; de az Egyesült Államokba már egy magabiztos férfi érkezett az óvilág udvarias modorával. Az enyhén arisztokratikus megjelenés melegszívű személyiséget takart, aki mindig kész volt másokat segíteni. Megismerte az élet abszurditásait, és élvezni is tudta. Saját magának nagyon magas mércét állított, de nem várta el, hogy mindenki azok szerint éljen.

Egész tudósi élete során nagyon közeli kapcsolatban maradt mentorával, Pólya Györggyel. Ellentétben a Taylor szerzőpár újabban megjelent Pólya-életrajzában közölt állításokkal, Szegő mindig a legnagyobb figyelmességgel és tapintattal kezelte Pólyát. Ők ketten egészen különböző személyiségek voltak; Pólya konzervatív, és pesszimista, Szegő pedig liberális és optimista alkat volt. Egy kis történet jól megvilágítja a kettejük közötti különbséget. Amikor Riesz Marcel Stanfordba jött, Pólya úgy érezte, nem fogadhat a házában egy olyan embert, akinek két törvénytelen leánya is volt. Szegő csak jót mulatott ezen a viktoriánus prüdérián.

Szegő azt tartotta, hogy mindenkinek addig kell matematizálnia, ameddig csak bírja; rávette Pólyát arra az ígéretre, hogy a problémamegoldással kapcsolatos pszihológiai tanulmányait 65 éves korának betöltéséig elhalasztja. Ez nem volt rossz alku, mert Pólya még így is 30 évet tölthetett edukációs vállalkozásával.

1946-ban egyetlen titkárnő volt a stanfordi intézetben. Minden oktató, beleértve Szegőt is maga gépelte a cikkeit. A háború utáni nagy fellendülés során ez gyorsan megváltozott, de cserében elveszett a bensőségesebb légkör. Ma már például lehetetlen volna az, amit Szegő 1946. nyarán még megtehetett: az összes felsőbb éves diákot meghívta magához vacsorára, a töltött káposztát és szilvás gombócot felesége készítette el szakértő szakács módjára.

Szegő felesége nem csak a szakácsművészetben volt járatos; a kémia doktora volt, és ő tartotta el a családot abban az időben, amikor Szegő a megbecsült, de igen gyatrán fizetett magántanári pozícióban működött Berlinben. Szenvedélyesen falta a könyveket, négy nyelven olvasott, szellemi társa és támasza volt férjének és gyermekeinek. Boldog családi otthont teremtett, és kiváltságos szerencsém, hogy három nyáron át is családtag lehettem náluk."

Szegő 1960-ig Stanfordban maradt, amikor emeritus professzorként nyugdíjba vonult.

Paul C. Rosenblum 1941. és 1943. között volt Szegő PhD diákja. Emlékeiről így ír a *Studying under Pólya and Szegő* c. cikkében a Szegő Összegyűjtött Munkái I. kötet 12–13. oldalán (újra megjelent az *A Century of Mathematics in America* c. kiadványban (II. rész, szerk. Peter Duren, American Mathematical Society, 1989, p.279–281):

„Hetente egyszer találkoztam Szegővel, hogy az előmenetelemet megbeszéljük. A heti találkozók miatt felelősnek éreztem magam azért, hogy legyen is miről beszámolni, és ne vesztegessem Szegő idejét. Észrevettem, hogy az efféle rendszeres találkozók azonos hatással voltak az én diákjaimra is, ezért azóta is követem ezt a gyakorlatot. Gyakran elemezte a problémák hátterét, és a frissebb szakirodalomban található kapcsolódó eredményeket. További kutatás céljára sok természetes problémát vetett fel.

Minden második héten Szegő az otthonába invitált vacsorára. Feleségével, Péter fiával és Veronika lányával elbájoló családi körbe kerültem. Mivel Szegőné a kémia tudósa volt, a középiskolás Péter pedig már érdeklődött a mérnöki pálya iránt, igen gyakran terelődött a szó tudományra, matematikára, időnként egészen szakszerű részletességgel. Picard tételének bizonyítását, mely a modulfüggvény konstrukciójával kezdődik, Szegőék vacsoraasztalánál hallottam először.

Az elővizsgámon, mely akkoriban szóbeli vizsga volt Stanfordban, Szegő a Picard tétel bizonyítását kérdezte. Sohse vártam volna ilyen kérdést, de nem tagadhattam, hogy ismerem, hiszen magától Szegőtől hallottam a bizonyítást. Szókratész módszerével szépen áttaszigált a buktatókon."

Peter Duren emlékezik:

„Amikor Stanfordban voltam oktató, hallgattam Szegő ortogonális polinomokról szóló előadásait. Ez valójában az analízis különböző aszimptotikus technikáiról szólt, például integrálok aszimptotikus becsléséről. Emlékszem, egy alkalommal a *Blaschke-szorzatokat* kellett alkalmaznia, de nem használta ezt az elnevezést. Mikor az egyik hallgató rákérdezett, hogy itt Blaschke-szorzatról van-e szó, azt válaszolta, hogy egyesek így nevezik, de ő nem akarja *azt az embert* íly módon megtisztelni. A diák rögtön kapcsolt, és megkérdezte, hogy Blaschke náci volt-e. Szegő kitérő választ adott, de a szeme villanása mutatta, hogy a kérdező eltalálta az igazságot."

Ami azt illeti, az idők megváltoztak. Ma már nem ügy Blaschkét nácinak nevezni, és ezzel együtt Blaschke-szorzatokról beszélni. Mindnyájan ezt tesszük. Kiváncsiak lennénk, hogyan reagálna Szegő a Bieberbach-sejtés megoldására.

Bob Osserman emlékeiből:

„Jól emlékszem egy Szegőizmusra. Röviddel Stanfordba érkezésem után egy estélyen beszélgettem vele. Valami ilyesmit mondott nekem: *„nem gondolja, hogy némileg csalunk, amikor azt állítjuk, hallgatóinkat megtanítjuk a matematikai kutatásra. Ez olyasmi, mintha azt hirdetnénk, meg tudjuk tanítani az embereket arra, hogy költők legyenek. Valójában csak annyit tehetünk, hogy példákon bemutatjuk, hogyan folyik a kutatás a matematikában, aztán valaki vagy tudja maga is csinálni, vagy nem.*" Akkor ezt megdöbbentő, talán szándékosan kissé botrányos gondolatnak találtam, de fokozatosan rá kellett jönnöm, hogy sokkal több igazság van benne, mint eredetileg gondoltam."

Halsey Royden A History of Mathematics at Stanford c. cikke (A Century of Mathematics in America, II. rész, szerk. Peter Duren, American Mathematical

Society, 1989, p.237–277) 256. oldalán a következő mulatságos eseményt írja le, mely 1948-ban, Riesz Marcell négy előadásból álló előadás-sorozatán történt.

„Az első előadás napján meleg volt, és a nagyméretű terem tele volt diákokkal és tanárokkal. Szegő Gábor bemutatta Rieszt, aki rögtön levetette a zakóját, és ingujjban, nadrágtartóban fogott hozá az előadáshoz. Kapott egy tál vizet és szivacsot. Miután teleírta a táblát, parancsolólag intett Szegőnek, aki felugrott és lemosta a táblát, miközben Riesz várakozva figyelte. Mármost Szegő rendkívül disztingvált és öntörvényű személyiség volt; elegáns, méretre csináltatott öltönyben járt, a hallgatók és tanártársai is mindig csodálattal nézték. Megdöbbentő volt őt úgy látni, mintha Riesz fiatal európai tanársegéde lenne! Miután ez a jelenet néhányszor megismétlődött, mondani se kell, a tábla és a padló úszott a mocsokban. Pólya György közvetlenül mögöttem ült Felix Bloch társaságában, akit magával hozott, hogy Pólya kiváló magyar honfitársát meghallgassa. Pólya nagy zavarban volt, és történtek miatt fojtott hangon szabadkozott."

Szegő 1940-ben kapta meg az amerikai állampolgárságot. Az 1945/46-os tanévben a Biarritzban, Franciaország délnyugati csücskében fekvő Amerikai Egyetemen amerikai katonáknak tanított matematikát, akik arra vártak, hogy visszahajózzák őket az Államokba. A Hadügyminisztérium polgári alkalmazottjaként szolgált; egyenruhát viselt, az ezredesivel azonos rangot, és bizonyos katonai előjogokat is kapott. Fia, Péter ugyanakkor szolgált az amerikai hadseregben, és Biarritzban volt hallgató, mialatt Szegő ott tanított. Ebben az időszakban Szegő Hollandiába és Angliába is ellátogatott, ahol sok matematikussal találkozott. *Joseph Ullman*, aki a University of Michigan emeritus professzora volt és 72 éves korában 1995. szeptember 11-én halt meg épp akkor, amikor ezen a kéziraton az utolsó simításokat végeztük, Biarritzban találkozott Szegővel, majd Stanfordba is követte őt, és Szegő irányítása alatta védte meg PhD disszertációját 1950-ben. *Michael Aissen* (a Rutgers Egyetem emeritus professzora) és *Robert L. Wilson*, az Ohio-beli Wesleyan University emeritus professzora szintén Szegő tanítványa volt Biarritzban. Szegő Magyarországra is el akart látogatni, de az oroszok megtagadták tőle az engedélyt. Édesanyja Budapesten élt 1946-ban bekövetkezett haláláig. Abban az időben Szegő Franciaországban volt, és Szegőék nem sokat tudtak arról, hogy mi történt Szegő bátyjával és Szegőné családtagjaival.

Michael Aissen visszaemlékezése szerint:

„A biarritzi hallgatók érdekes módon szereztek tudomást Szegő nagy személyes presztizséről. Az oktatói kar felszínes demokratikus szabálya szerint mindenkinek ugyanaz a megszólítás járt, „... úr". Egyetlen kivétel volt ez alól. Gábort mindenki doktor Szegőnek szólította."

Szegő egyösszegben kapott kártérítést a német kormánytól az 50-es években. Amikor elérte a nyugdíjkort, megkapta annak a nyugdíjnak megfelelő összeget, ami megillette volna, ha nem kényszerül Németország elhagyására.

Nyugdíjba vonulása után felesége egészsége megromlott, és Szegőé is hanyatlani kezdett. Utolsó matematikai előadását Fejér munkásságáról tartotta az 1969-ben Budapesten rendezett Konstruktív Függvénytani Konferencián. Anna asszony 1968-ban meghalt, és 1970-ben észrevették, hogy Szegő Parkinson-kórban szenved. Az 1973. és 1980. közötti időszakot megosztotta Palo Alto és Budapest között (gyakran szállt meg a margitszigeti Grand Hotelben). Budapesti tartózkodása alatt barátai és tanítványai sűrűn látogatták. Különösen szerette Alexits György, Erdős Pál, Fejes Tóth László és Turán Pál társaságát. Utolsó éveiben tolószékbe kényszerült, sok fájdalmat, szenvedést kellett elviselnie.

Még az után is, hogy Szegő abbahagyta a matematikai kutatást, a világ minden tájáról érkeztek hozzá cikkek, problémák. Ezeknek nagyon örült, és nagyon zavarta, hogy nem tudott mindre válaszolni, mint azt a múltban tette.

1952-ben Szegő az első dolgozatában közölt eredményeinek kiterjesztéseit publikálta *On certain Hermitian forms associated with Fourier series of positive functions cimmel (Comm.Sem. Univ. Lund, Tome Suppl., Festkrift Marcel Riesz, 1952. 228–238)*. Erről *Barry McCoy* így írt Szegő Összegyűjtött Munkái, I. kötet, p.47–52):

> „Nem is vitás, hogy Szegő összes dolgozata közül [ennek] van a legtöbb alkalmazása a matematikán kívül. Először is, a tételt ihlető problémát egy mágnességgel foglalkozó vegyész vetette fel. A fizikusok által talált kiterjesztés meglepő kapcsolatot tárt fel nemlineáris differencia és differenciálegyenletek integrálható rendszerei között [...] Ráadásul Szegő tételét újabban a kvantum-mezőelméleten dolgozó fizikusok is felhasználták, a Toeplitz- determinánsok pedig a Yang–Mills egyenlet statikus monopólus megoldásának tanulmányozásában bukkannak fel."

Egy matematikus megtiszteltetésének egyik módja, ha valamely felfedezését róla nevezzük el. Mint korábban említettük, Szegő egy sor ilyen felfedezést tett. További lehetőség annak megmutatására, hogy egy matematikus munkássága elég mély hatású, a válogatott, vagy összegyűjtött munkáinak kiadása. Szegő Összegyűjtött Munkáinak három vastag kötete (2626 oldal) még életében, 1982-ben jelent meg a Birkhauser Kiadónál „Gabor Szegő: Collected Papers" címmel a *Contemporary Mathematicians* sorozatban. Fiával, Péterrel küldtem (R.A.) el neki egy-egy példányt a kötetekből, és Péter is átlapozta, mielőtt édesapjának odaadta volna őket. Szegőnek igen jó napja volt, amikor fia meghozta a könyvet; nagy örömében állandóan kérdezgette Pétert, vajon ezt, vagy amazt észrevette-e, megtalálta-e a könyvben.

Marc Kac írt referátumot Szegő Összegyűjtött Munkáiról (The American Mathematical Monthly, **91** (1984), p.591–592), és ebben így írt:

> „Mert ki maradhat közömbös egy oly tételt látva, mely szerint ha egy hatványsornak véges sok különböző együtthatója van, akkor vagy racionális törtfüggvényt állít elő, vagy nem folytatható a konvergenciakörén

kívül! Vagy egy olyannal, mely szerint egy nem-negatív integrálható függvény Fourier-együtthatóiból képzett n-edik Toeplitz- determináns n-edik gyöke a függvény geometriai közepéhez tart. [Az utóbbi mondat Kac cikkében a képleteket helyettesíti.]

Azért választottam ezt a két példát — mindkettőt Szegő korai éveiből —, mert az első egyike a sok különálló gyöngyszemnek, melyek sűrűn elszórva lelhetők fel a könyvben, míg a második egy fontos fejlődés kezdete, mely még várhatóan a jövendő években is sokáig folytatódik.

Szegő legtöbb — talán mindegyik — munkájára jellemző, hogy valamely konkrét problémával kezdődik. Az pedig, hogy sokukból virágzó elmélet bontakozott ki (mint például az egységkör ortogonális polinomjainak esetében), egyaránt dicséri Szegő hibátlan izlését, mellyel problémáit megválasztotta, valamint a problémák lényegéig hatoló mély meglátásait. Senki, Szegő maga sem, még csak nem is álmodhatott arról, hogy egyes eredményei végül is milyen óriási hatással lesznek a matematikára, a tudományra [...]"

Eredményei a klasszikus analízis életképességének, és szerzőjük virtuozitásának emlékművei.

Ismét Halsey Royden cikkéből idézünk (*A History of Mathematics at Stanford*, p. 249., *A Century of Mathematics in America*, II. rész, szerk. Peter Duren, American Mathematical Society, 1989, p.237–277):

„Carl Loewner (Karl Löwner) virtuóznak nevezte Szegőt, és elmondta, hogy I. Schur „der begabte Szegő"-ként (a tehetséges Szegő) emlegette [...]
Szegő Gábor volt a legjobb tanár, akit valaha is hallgattam. Előadásai elegánsak és lényegretörők voltak [...] Mindig a legtermészetesebbnek tűnő, közvetlen úton közelítette meg a témát, nem törekedett ravasz rövidítésekre, melyekkel gyorsabban lehetett volna bizonyítani."

Szegő Gábor emlékműként hagyta ránk matematikai munkásságát. Műve tovább él, és új felfedezésekhez vezet. Egyik fő témája, az ortogonális polinomok elmélete napjainkban is igen aktívan művelt kutatási terület. Gyakran fájdalommal tölt el bennünket, hogy nincs már közöttünk, és nem örülhet mindannak a kutatói munkának, amit az általa indított problémakörökben ma kifejtenek.

Epilógus. Kunhegyes városa 1995. január 21-én ünnepelte a Szegő-centenáriumot. E nap eseményeinek színes leírása, valamint L. Lorch és R.A. ünnepi beszéde megtalálható az interneten az
URL http://www.math.ohio-state.edu/JAT/DATA/SPECIALS/szego
cím alatt.
Több mint száz magánszemély, Kunhegyes város, a Washington University valamint a Stanford University nagylelkű adománya lehetővé tette, hogy a magyar szobrászművész, Győrfi Lajos elkészítse Szegő Gábor bronz mellszobrát. A szobrot

a Kunhegyesi Városi Könyvtár előtt állították fel, az ünnepélyes leleplezésre 1995. augusztus 23-án került sor. Erről az ünnepségről Kathy A. Driver írt beszámolót, mely megtalálható az interneten
URL http://www.math.ohio-state.edu/JAT/DATA/SPECIAL/szego.bust
cím alatt. A szobor egy-egy másolatát a Washington University és a Stanford University is felállítja.

Köszönetnyilvánítás. Köszönetünket fejezzük ki Veronica Szego Tincher-nek és Peter Szego-nek a személyes természetű információkért, és e cikk megírásában nyújtott folyamatos segítségükért. Michal Aissen-nek kösszönjük, hogy tudomásunkra hozta Szegő Biarritzbeli tartózkodását. Köszönet illeti Carl de Boor-t, aki a cikk német nyelvi vonatkozásait illetően adott tanácsokat, és angolra fordította Szegő Tamarkinhoz írt levelét. Köszönetet mondunk Dietrich Braess-nak és Herbert Stahl-nak, akik segítettek megismerni az 1920-as évek német egyetemi rendszerét. Köszönjük Peter Duren-nek a stanfordi napjairól szóló történetet. Köszönettel tartozunk Priscilla R. Feigen-nek, aki segített nekünk a Stanford Egyetem Matematikai Intézetének korábbi tagjait megtalálni. Köszönjuk Edit Kurali-nak, hogy angolra fordította P.N. magyarul írott cikkét (Szegő Gábor, Magyar Tudomány 8–9 (1986), p.728–736; újra megjelent mint Magyar Tudósok, XVI: Szegő Gábor, Nyelvünk és Kulturánk **65** (1986), 57–63). Köszönjük Peter Lax-nak, hogy The Old Days c., még publikálatlan cikkéből kivonatokat közölhettünk. Köszönjük Bob Osserman-nak a Szegőről szóló anekdótát. Köszönet illeti Szabó Lászlót, aki Riesz Frigyes értékelő jelentését fordította le a Mathematikai és Physikai Lapokból (**23** (1924), 106). Végül, köszönettel tartozunk Liz Askey-nak, Chandler Davis-nek, Peter Duren-nek, Samuel Karlin-nak, Peter Lax-nak, Lee Lorch-nak, Peter Szego-nek, Veronica Szego Tincher-nek, és Vincze Istvánnak, akik kéziratban olvasták és javaslataikkal jobbították e cikket. E cikkünk alapjául részben P.N. fentebb említett Magyar Tudománybeli cikke szolgált, amely maga is sokat merített a R.A. által szerkesztésében kiadott Szegő Összegyűjtött Munkái bevezető anyagaiból (Birkhauser, Boston, 1982).

Richard Askey
A matematika Szegő Gábor professzora
University of Wisconsin
Madison, Wisconsin

Paul Nevai
a matematika professzora
University of Ohio
Columbus, Ohio

SZEGŐ GÁBOR ÉS TURÁN PÁL

HALÁSZ GÁBOR

Felhasználom az alkalmat, hogy egyben tanáromra, Turán Pálra is emlékezzek.

Szegő és Turán a személyes barátságon kívül sokoldalú szakmai kapcsolatban állt egymással. Ortogonális polinómokkal, amelyek Szegő kutatásainak egyik központi témája voltak, Turán is sokat foglalkozott. A Legendre polinómokra vonatkozó nevezetes Turán-féle egyenlőtlenséget például Szegő hosszú cikkében ([1]) Karlinnal közösen lényegesen általánosította. De írtak — más témában — egymással is közös cikket ([2]). Itt most egy viszonylag apróságot említek saját emlékeimből.

Legyen $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ n-edfokú polinóm, amelynek ismerjük egy korlátját a $[0,1]$ intervallumban, például

$$\max_{0 \le x \le 1} |P(x)| \le 1.$$

Turán kérdezte Szegőtől: Igaz-e, hogy ekkor

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \log(k+1) \right| \le c \log n$$

valamilyen abszolút konstans c-vel? (A kérdés jellege persze nem új az irodalomban: Ha $\log(k+1)$ helyett k állna, akkor a szóbanforgó mennyiség $P'(1)$ volna, ami Markov klasszikus, pontos egyenlőtlensége szerint legfeljebb $2n^2$, mégha nem is n nagyságrendű, mint azt első ránézésre esetleg várnánk.) Hozzátette, hogyha a logaritmus függvénynek lenne momentumként való előállítása,

$$\log(k+1) = \int_0^\infty e^{-ky} f(y)\, dy,$$

akkor az a_k-val való beszorzással és összegezéssel adódó

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \log(k+1) = \int_0^\infty P(e^{-y}) f(y)\, dy$$

képlettel lehetne becsülni. Amikor ezt később nekem elmesélte, csak annyit jegyeztem meg, hogy ilyen momentum előállítás persze nem létezik; abszolút konvergens integrállal valóban nem.

Szerencsére Szegő nem ilyen negatívan állt hozzá a kérdéshez: Kiindult a kicsit módosított

$$\log(k+1) = \int_0^\infty \frac{e^{-y} - e^{-(k+1)y}}{y}\, dy$$

előállításból, ami a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \log(k+1) = \int_0^\infty \frac{e^{-y}\big(P(1) - P(e^{-y})\big)}{y}\, dy$$

éplethez vezet. Innen — az integrálban fellépő különbség miatt ugyan nem egy, hanem két sorban — az említett Markov egyenlőtlenséget is felhasználva könnyen adódik a pozitív válasz Turán kérdésére. Szegő ezt több hasonló, éles becsléssel együtt a [3] dolgozatában közölte. Összegyűjtött műveinek ([4]) tanúsága szerint ez volt utolsó publikált eredménye.

Turán nem szokott öncélúan problémákat felvetni. Néhány szót arról, hogy mihez kellett neki és Knapowskinak a fenti egyenlőtlenség az elsősorban általuk kifejlesztett úgynevezett összehasonlító prímszámelméletben.

Csebisev állította bizonyítás nélkül, hogy $y \to +0$ esetén

$$\sum_{p\equiv 1 \pmod 4} e^{-py} - \sum_{p\equiv 3 \pmod 4} e^{-py} \to -\infty,$$

ahol p a prímszámokat jelenti. Szemléletesen kifejezve, 4-gyel osztva több 3 maradékot adó prímszám van, mint 1 maradékot adó. Kiderült, hogy ez akkor és csak akkor van így, ha fennáll egy bizonyos, mind a mai napig bebizonyítatlan Riemann-féle hipotézis, ami a prímszámok (mod 4 vett) legideálisabb eloszlását vonja maga után. Fontos az is, hogy a maradékosztályokat az úgynevezett Abel közepükkel hasonlítottuk össze: A természetesebb

$$\sum_{p\le x,\, p\equiv 1 \pmod 4} 1 - \sum_{p\le x,\, p\equiv 3 \pmod 4} 1$$

különbség nem mutat Csebisev jelenséget, $x \to \infty$ esetén akármilyen nagy pozitív és negatív értékeket is felvesz.

Az 1 és a 3 maradékosztály között az a különbség, hogy az első kvadratikus maradék, a másik nem-maradék, és valóban, a megfelelő Riemann hipotézist feltételezve általános modulus esetén is tapasztalható a kvadratikus nem-maradék prímek túlsúlya. Turán és Knapowski meg akarták mutatni, hogy azonos kvadratikus jellegű maradékosztályok között viszont egyiknek sincs ilyen kitüntetett helyzete. A 8 modulus esetén a szóbajövő, (páratlan) maradékosztályok közül az 1 kvadratikus maradék, míg a 3, 5 és 7 kvadratikus nem-maradékok, és például azt sejtették, hogy $y \to +0$ esetén

$$\sum_{p\equiv l_1 \pmod 8} e^{-py} - \sum_{p\equiv l_2 \pmod 8} e^{-py}$$

$+\infty$ és $-\infty$ között oszcillál, ahol l_1 és l_2 a 3, 5 és 7 számok közül bármelyik két különböző jelenti. A Szegő Gábornak dedikált [5] dolgozatukban, amelyben a fenti egyenlőtlenség fontos szerepet játszik, ennek bizonyításához az első lépést tették meg. Bár később kimutattak ilyen jelenséget bonyolultabb értelemben, ez a legtermészetesebb kérdés továbbra is nyitva maradt.

[1] Szegő G. és S. Karlin: On certain determinants whose elements are orthogonal polynomials, *J. Anal. Math.*, **8** (1960/61), 1–157.

[2] Szegő G. és Turán P.: On the monotone convergence of certain Riemann sums, *Publ. Math. Debrecen,* **8** (1961), 326–335.

[3] Szegő G.: On some problems of approximations, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.,* **9** (1964), 3–9.

[4] Gabor Szegö: Collected Papers, 1., 2. és 3. kötet, (szerk. R. Askey), Birkhäuser, Boston 1982.

[5] S. Knapowski és Turán P.: On an assertion of Chebyshev, *J. Anal. Math.,* **14** (1965), 267–274.

SZEGŐ GÁBOR EGY BECSLÉSÉRŐL

VÉRTESI PÉTER

1. Szegő Gábor „Orthogonal Polynomials" ([1]) című könyvében található a következő becslés a $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ n. Jacobi polinom $x_{kn}^{(\alpha,\beta)} = \cos\vartheta_{kn}^{(\alpha,\beta)}$, $1 \le k \le n$, $n = 1, 2, \ldots$, gyökeire vonatkozólag.

Ha $(\alpha, \beta) > -1$ *és* $0 < \vartheta_{1n}^{(\alpha,\beta)} < \vartheta_{2n}^{(\alpha,\beta)} < \ldots < \vartheta_{nn}^{(\alpha,\beta)} < \pi$ *a* $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta)$ *gyökei, akkor*

$$\vartheta_{kn}^{(\alpha,\beta)} = \frac{k\pi + O(1)}{n} \tag{1}$$

ahol az $O(1)$ *egyenletesen korlátos minden* $1 \le k \le n$ *és* $n = 1, 2, \ldots$, *értékekre* (l. [1, Theorem 8.9.1.] és [1, Ch. IV]).

A fenti formula igen hasznos az approximációelmélet számos problémája kapcsán, de sok esetben pontosabb becslésre van szükségünk.

2. Szegő Gábor eredeti gondolatmenetét alkalmazva viszonylag egyszerűen *adódik a*

$$\begin{aligned} \vartheta_{kn}^{(\alpha,\beta)} &= \frac{2k + \alpha - 1/2}{2N}\pi + \varrho_{kn}^{(\alpha,\beta)}, \\ |\varrho_{kn}^{(\alpha,\beta)}| &\le \frac{c((\alpha,\beta),\varepsilon)}{kn}, \end{aligned} \qquad 1 \le k \le (1-\varepsilon)n \tag{2}$$

becslés, ahol $N = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}$, $0 < \varepsilon < 1$, tetszőleges fix szám, $c((\alpha,\beta),\varepsilon) > 0$, $(\alpha, \beta) > -1$ (l. [2]).

A fenti reláció $K := \min(k, n-k+1) \ge k_0$ esetén jóval élesebb mint (1). Ha $1 \le K < k_0$ esetén a

$$\lim_{n\to\infty} n\vartheta_{kn}^{(\alpha,\beta)} = j_k^{(\alpha)}, \quad k \text{ rögzített,} \tag{3}$$

relációt ([1, (8.1.3)]; itt $j_k^{(\alpha)}$ a k. pozitiv gyöke a $J_\alpha(x)$ Bessel függvénynek), valamint a $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)$ összefüggést alkalmazzuk, (2) és (3) segítséget nyújt oly következtetésekre, melyek levonásához (1) nem elegendő. A továbbiakban ezekre adunk példákat a 3.A–3.C pontokban.

3.A. (2) és (3) azonnal adja a sokszor hivatkozott

$$(4)\qquad \frac{c_1}{n} \le \vartheta^{(\alpha,\beta)}_{k+1,n} - \vartheta^{(\alpha,\beta)}_{kn} \le \frac{c_2}{n}, \qquad 0 \le k \le n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

egyenlőtlenséget ($(\alpha,\beta) > -1$, $\vartheta_0 \equiv 0$, $\vartheta_{n+1} \equiv \pi$).

B. Jelölje $L_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)$ az $x_{kn}^{(\alpha,\beta)}$ ($1 \le k \le n$) gyökökön alapuló Lagrange-interpolációt egy, a $[-1,1]$-ben folytonos f-re ($f \in C$). Faber tétele alapján $\limsup_{n\to\infty} \left\| L_n^{(\alpha,\beta)}(f,x) \right\| = \infty$ *alkalmas* $f \in C$-re ($\|\dots\|$ a maximum-norma $[-1,1]$-ben). Ha azonban f nemcsak folytonos, hanem korlátos variációjú is ($f \in CBV$), *akkor*

$$(5)\qquad \lim_{n\to\infty} \left\| L_n^{(\alpha,\beta)}(f,x) - f(x) \right\| = 0 \quad \forall f \in CBV$$

hacsak $-1 < (\alpha,\beta) < 0.5$ (l. [3]). (5) belátásához megint (2) ad hathatós segítséget.

C. Legyen $w(x)$ valamilyen súlyfüggvény $[-1,1]$-en, $L_n(f,w)$ a megfelelő n. ortogonális polinom gyökein vett Lagrange interpoláció. Az Erdős Pál és Turán Pál által bebizonyított

$$(6)\qquad \lim_{n\to\infty} \left\| L_n(f,w,x) - f(x) \right\|_{2,w} = 0 \quad \forall f \in C \quad ^{(1)}$$

tétel különösen a már említett Faber tétel fényében válik érdekessé (a trigonometrikus esetet J. Marcinkiewicz bizonyította be).

A (6) állítás számos általánosítása ismert (l. pl. P. Nevai [4]). Azonban csak a legutóbbi időkben sikerült, éppen a (2) formula felhasználásával szükséges és elégséges feltételeket találni a szokásos

$$(7)\qquad \mathcal{H}_{nm}^{(t)}(f, x_{kn}) = f^{(t)}(x_{kn}), \qquad 0 \le t \le m-1, \quad 1 \le k \le n$$

feltételekkel definiált $\mathcal{H}_{nm} \in \mathcal{P}_{nm-1}$ ($m \ge 1$, fix, $f^{(m-1)} \in C$) Hermite-interpolációs polinom esetén a

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left\{ \mathcal{H}_{nm}^{(\alpha,\beta)}(f,x) - f(x) \right\}^{(t)} \right\|_{p,u} = 0 \qquad \forall f^{(m-1)}$$

típusú feladat megoldására (l. [5]).

4. A fenti példák feltehetőleg csak a kezdetét jelentik további alkalmazásoknak. Meg szeretném még említeni, hogy a Laguerre- (v. Hermite-) polinomok gyökeire érvényes hasonló okfejtésekkel minden bizonnyal analog tételek nyerhetők.

---

(1) Itt és később $\|g(x)\|_{p,u} = \left(\int_1^1 |g(x)| P_u(x) dx \right)^{1/p}$, $0 < p < \infty$.

Irodalom

[1] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, AMS Coll. Publ., Vol23, Providence, 1939.

[2] P. Vértesi, On the zeros of Jacobi polynomials, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **25** (1990), 401–408.

[3] P. Vértesi, One-sided convergence condition for Lagrange interpolation based on the Jacobi roots, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **45** (1983), 419–428.

[4] P. Névai, Mean convergence of Lagrange interpolation. III, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **282** (1984), 669–698.

[5] P. Vértesi, Y. Xu, Mean convergence of Hermite interpolation, revisited, *Acta Math. Hungar.*, **69** (1995).

Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete
Budapest, Postafiók 127
Hungary - 1364

HATVÁNYSOROK VÉGES SOK KÜLÖNBÖZŐ EGYÜTTHATÓVAL: SZEGŐ TÉTELÉNEK ÁLTALÁNOSÍTÁSA

HALÁSZ GÁBOR

Szegő Gábor születésének 100. évfordulójára

Részeredmény Pólya egy problémájában: Szegő és Fabry hatványsorok nem-folytathatóságáról szóló tételének közös általánosítása.

Szegő tétele ([1]). *Ha az*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

hatványsor együtthatói csak véges sok különböző értéket vesznek fel, akkor az (egységkörben biztosan reguláris) $f(z)$ függvény vagy seholsem folytatható analitikusan az egységkörön túl, vagy az együtthatók valahonnan kezdve periodikusak.

Az utóbbi eset azzal is jellemezhető, hogy — Δ-val jelölve egy periodust —

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^{\Delta} - 1},$$

ahol $g(z)$ polinóm, ami már abból is következne, ha $g(z)$ 1-nél nagyobb sugarú körben reguláris volna.

Hatványsorok nem-folytathatóságáról szóló másik klasszikus tétel

Fabry hézagtétele (l. például [2]). *Ha* Λ *természetes számok* 0 *sűrűségű részhalmaza, azaz*

$$\Lambda(N) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{k=0 \\ k \in \Lambda}}^{N} 1 = o(N),$$

Köszönettel tartozom Petruska Györgynek: A kunhegyesi Szegő-emlékülésen tartott előadása keltette fel az érdeklődésemet a probléma iránt.

és $a_k = 0$ ($k \notin \Lambda$), akkor az

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

hatványsor seholsem folytatható analitikusan a konvergencia-körön túl.

Pólya ötlete volt a két tétel közös általánosítása.

Pólya sejtése. *Ha Λ természetes számok 0 sűrűségű részhalmaza, és a_k véges sok értéket vesz fel $k \notin \Lambda$ esetén, akkor*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \frac{g(z)}{z^{\Delta} - 1},$$

ahol Δ természetes szám, $g(z)$ a konvergencia-körén túl seholsem folytatható függvény.

Szegő ([3]) bebizonyította a sejtést arra az esetre, amikor a kivételes együtthatók, a_k ($k \in \Lambda$) is korlátosak. Mi nagyságrendi megszorítás nélkül, de erősebb hézagfeltétel mellett bizonyítjuk be.

Tétel. *Ha a $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ jelöléssel*

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j \to +\infty \quad (j \to \infty),$$

akkor Pólya sejtése igaz.

Bizonyítás. A teljesség kedvéért elismételjük Szegő gondolatmenetét, amit csak a bizonyítás végén kell módosítanunk.

Ha $f(z)$ konvergencia-sugara < 1, akkor Fabry tételére hivatkozva, ha $= 1$, de az egységkörön túl nem folytatható, akkor magától értetődően nincs mit bizonyítani. Tegyük fel hát, hogy $f(z)$ reguláris $|z| < 1$-ben és $z_0 = \exp(i\vartheta_0)$ környezetében.

Ebből le fogjuk vezetni, hogy $\epsilon > 0$-hoz létezik véges sok komplex szám, $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ úgy, hogy a „kvázi rekurzió”

$$|a_n\gamma_s + a_{n+1}\gamma_{s-1} + \ldots + a_{n+s-1}\gamma_1 + a_{n+s}| < \epsilon$$

teljesül majdnem minden n-re, azaz egy 0 sűrűségű halmaz kivételével. Először azt mutatjuk meg, hogyan következik ebből a Tétel.

A 0 sűrűségű kivételes halmazt vegyük hozzá Λ-hoz, és a szintén 0 sűrűségű egyesítésükre tartsuk meg a Λ jelölést; ebben a lépésben ugyanis már nem használjuk az eredeti Λ-ra tett erősebb hézagfeltételt, pusztán 0 sűrűségűségét.

Ha $\Lambda = \emptyset$ volna, akkor az $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+s-1}$ szám s-esek között legfeljebb s^d különböző fordulhatna elő, ahol d-vel jelöltük az a_k-k által felvett véges sok érték számát. Képezve ezen s-eseket $s^d + 1$ szomszédos n-nel, kell, hogy legyen közöttük két egyforma: mondjuk $n_1 < n_2$-vel

$$a_{n_1+i} = a_{n_2+i} \quad (i = 0, \ldots, s-1).$$

Írjuk fel a kvázi rekurziót $n = n_1$-gyel és $n = n_2$-vel. Mivel első s tagjuk megegyezik,

$$|a_{n_1+s} - a_{n_2+s}| < 2\epsilon.$$

Ha ϵ kisebb, mint a d érték minden páros távolságának a fele, — ϵ-t egyszersmindenkorra rögzítsük le így, — akkor ez csak úgy lehet, hogy

$$a_{n_1+s} = a_{n_2+s}.$$

A két s-es tehát $n = n_1 + 1$-re és $n = n_2 + 1$-re is megegyezik, és így tovább: a_k periodikus $k = n_1$-től kezdve $n_2 - n_1 \leq s^d$ periodussal. Ha Δ az összes, s^d-nél nem nagyobb természetes szám legkisebb közös többszöröse, akkor Δ szintén periodus lesz. Mivel ϵ-nal együtt s-et is lerögzítettük, Δ is rögzített egész.

Ha $\Lambda \neq \emptyset$, akkor ezen érvelés alapján a_k Δ szerint azért periodikus lesz legalábbis olyan $[u + \Delta, v]$ intervallumokban, amelyekre $[u, v] \cap \Lambda = \emptyset$:

$$a_k = a_{k-\Delta} \quad (u + 2\Delta \leq k \leq v),$$

feltéve, ha $u + 2\Delta \leq v$.

Legyen

$$g(z) = f(z)(z^{\Delta} - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Itt

$$b_k = a_{k-\Delta} - a_k = 0$$

a fenti k-kra. b_k tehát csak akkor lehet 0-tól különböző, ha k benne van valamely $\lambda \in \Lambda$ $[\lambda, \lambda + 2\Delta)$ környezetében. De ezen k egészek halmaza is 0 sűrűségű, hiszen számuk N-ig

$$\leq 2\Delta\Lambda(N) = o(N).$$

Másszóval $g(z)$ kielégíti Fabry tételének feltételét, tehát a konvergencia-körén túl seholsem folytatható analitikusan. Ez Tételünk állítása.

A kvázi rekurzió bizonyításában abból indulunk ki, hogy a kifejezés

$$f(z)(1 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_s z^s)$$

$(n + s)$-edik együtthatója:

$$a_n\gamma_s + a_{n+1}\gamma_{s-1} + \ldots + a_{n+s-1}\gamma_1 + a_{n+s} =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varrho} \frac{f(z)(1 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_s z^s)}{z^{n+s+1}}\, dz \quad (\varrho < 1).$$

z^n káros hatását ellensúlyozandó, helyettesítsük $f(z)$-t $f(z) - s_n(z)$-vel, ahol

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k;$$

ezt megtehetjük, hiszen a kettőnek az n-ediktől kezdődően megegyeznek az együtthatói. Legyen

$$f_n(z) = \frac{f(z) - s_n(z)}{z^n},$$

és bevezetve a

$$P(w) = \gamma_s + \gamma_{s-1}w + \ldots + \gamma_1 w^{s-1} + w^s$$

jelölést, formulánk jobb oldala így alakul:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varrho} f_n(z)P\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z}.$$

$f(z)$, így $f_n(z)$ is reguláris $z_0 = \exp(i\vartheta_0)$ környezetében, és integrálhatunk z_0 megkerülésével is a ϱ sugarú kör nagy ívén:

$$\left\{z = re^{i\vartheta} \; : \; \delta \le |\vartheta - \vartheta_0| \le \pi\right\},$$

majd két sugárirányú szakaszon:

$$\left\{z = re^{i(\vartheta-\delta)} \; : \; \varrho \le r \le 1+\delta\right\},$$
$$\left\{z = re^{i(\vartheta+\delta)} \; : \; \varrho \le r \le 1+\delta\right\},$$

és végül az $1 + \delta$ sugarú kör kis ívén:

$$\left\{z = (1+\delta)e^{i\vartheta} \; : \; |\vartheta - \vartheta_0| \le \delta\right\}.$$

δ-t úgy rögzítjük le, hogy az így kapott Γ út végig $f(z)$ regularitási tartományában fusson.

Meg kell még adnunk a ϱ sugarat. Legyen Γ_1 Γ-nak a $w = 1/z$ leképezés általi képe. $\varrho = 1$ esetén Γ_1 nagyrészt az egységkörvonalon haladna, de az egységkörön belül záródna. Mivel az egységkör kapacitása $= 1$, ezé < 1 volna. Válasszunk 1-hez olyan közeli $\varrho < 1$-et, hogy Γ_1 kapacitása is még 1-nél kisebb legyen.

Γ-t így lerögzítve, formulánk végső alakja:

$$a_n\gamma_s + a_{n+1}\gamma_{s-1} + \ldots + a_{n+s-1}\gamma_1 + a_{n+s} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_n(z)P(\frac{1}{z})\frac{dz}{z}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$|f_n(z)| \le M \quad (z \in \Gamma)$$

majdnem minden n-re; itt és a továbbiakban M, — miután Γ-t már lerögzítettük, — rögzített pozitív, a különböző előfordulásoknál esetleg más és más konstansokat jelöl. Triviális becsléssel

$$|a_n\gamma_s + a_{n+1}\gamma_{s-1} + \ldots + a_{n+s-1}\gamma_1 + a_{n+s}| \leq$$
$$\frac{1}{2\pi} M \max_{z\in\Gamma} \left| P\left(\frac{1}{z}\right)\right| \int_\Gamma \frac{|dz|}{|z|} = M \max_{w\in\Gamma_1} |P(w)| < \epsilon,$$

hiszen 1-nél kisebb kapacitású, (Csebisev konstansú) halmazon 1 főegyütthatós polinóm akármilyen kicsivé tehető, és ezzel készen leszünk. (Ilyen polinóm a konkrét esetben a kapacitásra való utalás nélkül közvetlenül is konstruálható, l. például [1]-ben.)

Szegő ezen a ponton Riesz Marcell egy bizonyítására hivatkozik, amiből minden n-re következik $f_n(z)$ korlátossága, ha a_k is korlátos. A kivételes együtthatóknak megfelelően Riesz bizonyítását kicsit módosítanunk kell.

Csak olyan n-ekkel foglalkozunk, amelyek „közelében" nincs „nagy" kivételes együttható: $|a_k| \leq |n-k|+1$ minden $k \in \Lambda$-ra. Mivel $k \notin \Lambda$ esetén a_k korlátos, ilyen n mellett minden k-ra fennáll egy

$$|a_k| \leq M(|n-k|+1)$$

alakú becslés.

$|z| < 1$ esetén

$$|f_n(z)| = \left|\frac{f(z)-s_n(z)}{z^n}\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^{k-n}\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} M(k-n+1)|z|^{k-n} = \frac{M}{(1-|z|)^2}.$$

Speciálisan tehát $f_n(z)$ egyenletesen korlátos a $|z| = \varrho$ körvonalon.

Lássuk be ezt a

$$D(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{z = re^{i\vartheta} : \varrho \leq r \leq 1+\delta,\ |\vartheta - \vartheta_0| \leq \delta\}$$

halmazon is; halmazunk határa tartalmazza ugyanis Γ további részeit. Válasszunk $\delta_1 > \delta$-t úgy, hogy még $D(\delta_1)$ is benne legyen $f(z)$ regularitási tartományában.

$|z| > 1$, $z \in D(\delta_1)$ esetén $f(z)$ korlátos, és

$$|f_n(z)| = \left|\frac{f(z)-s_n(z)}{z^n}\right| \leq M + \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-n}\right| \leq M + \sum_{k=-\infty}^{n} M(n-k+1)|z|^{k-n} =$$
$$M + \frac{M}{\left(1-\frac{1}{|z|}\right)^2} \leq \frac{M}{(|z|-1)^2}.$$

Összevetve a $|z| < 1$-ben talált becsléssel,

$$\left|f_n(z)\right| \le \frac{M}{\left(|z|-1\right)^2} \quad \left(z \in D(\delta_1)\right).$$

A korlátunk „másodrendben" végtelenné válik az egységkörvonalon, de $D(\delta_1)$ határán csak két pontban, $z_1 = \exp(i\vartheta_1)$-ben és $z_2 = \exp(i\vartheta_2)$-ben, ahol $\vartheta_{2,1} = \vartheta_0 \pm \delta_1$. Szorozzunk be hát e két pontban másodrendben eltűnő segédfüggvénnyel:

$$g_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} f_n(z)(z-z_1)^2(z-z_2)^2.$$

Ezzel $g_n(z)$-t $D(\delta_1)$ teljes határán egyenletesen korlátossá tettük, de $g_n(z)$ belül reguláris lévén, a maximum elv értelmében

$$\left|g_n(z)\right| \le M, \quad \left|f_n(z)\right| \le \frac{M}{\left|(z-z_1)^2(z-z_2)^2\right|} \quad \left(z \in D(\delta_1)\right).$$

Speciálisan $D(\delta)$-n, amelynek pontjai pozitív távolságra vannak z_1-től és z_2-től,

$$\left|f_n(z)\right| \le M \quad \left(z \in D(\delta)\right).$$

Végeredményben tehát $f_n(z)$ egyenletesen korlátos az egész Γ-n. Ezt olyan n-ekre bizonyítottuk be, amelyekre $|a_k| \le |n-k|+1$ minden $k \in \Lambda$ esetén. Miért lesz majdnem minden n ilyen?

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left|f(re^{i\vartheta})\right|^2 d\vartheta \le M \quad (0 < r < 1)$$

a korábbi $\vartheta_{2,1} = \vartheta_0 \pm \delta_1$ definícióval, hiszen f az íven (még a $0 < r < 1$ intervallumon túl is) korlátos marad. Mivel a_k ($k \notin \Lambda$) korlátos, ezen tagok adaléka a Parseval formulát használva még a teljes körvonalon is,

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k\notin\Lambda}}^{\infty} a_k r^k e^{ik\vartheta} \right|^2 d\vartheta = 2\pi \sum_{\substack{k=0 \\ k\notin\Lambda}}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} < \frac{M}{1-r}.$$

A kettőből a $k \in \Lambda$ tagok adalékára azt kapjuk, hogy

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k\in\Lambda}}^{\infty} a_k r^k e^{ik\vartheta} \right|^2 d\vartheta \le 2\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left|f(re^{i\vartheta}\right|^2 d\vartheta + 2\int_0^{2\pi} \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k\notin\Lambda}}^{\infty} a_k r^k e^{ik\vartheta} \right|^2 d\vartheta \le$$

$$M + \frac{M}{1-r} \le \frac{M}{1-r}.$$

Ha a baloldali összegből elhagyjuk az első véges sok tagját, — ami korlátos hibát okoz, és becslésünk alakját nem változtatja meg, — akkor elérhetjük, hogy csak olyan $k = \lambda_j$ tagok maradjanak meg, amelyekre

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j \geq \frac{c}{\delta_1}.$$

Most használjuk ki a Λ-ra tett erős hézagfeltételt: Wiener ([4]) tétele szerint az előző egyenlőtlenségből alkalmas abszolút konstans c mellett — Ingham élesítése szerint bármilyen $c > \pi$ megteszi, de számunkra ennek nincs jelentősége, — a kis íven vett négyzetintegrál konstans szorosával becsülhető a teljes körön vett integrál: Ismét felhasználva a Parseval formulát,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\in\Lambda}}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leq \frac{M}{1-r},$$

ahol kiegészítettük az összeget az előbb elhagyott véges sok taggal.

Csak a $k \leq N$ tagokat megtartva,

$$r^{2N} \sum_{\substack{k=0 \\ k\in\Lambda}}^{N} |a_k|^2 \leq \frac{M}{1-r},$$

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\in\Lambda}}^{N} |a_k|^2 \leq \frac{M}{r^{2N}(1-r)} \leq MN$$

az $r = 1 - 1/N$ választással. Speciálisan $N = k$-val

$$|a_k| \leq M\sqrt{k} \leq \frac{k}{2}$$

elég nagy $k \in \Lambda$-ra.

Számunkra n rossz, ha valamilyen $k \in \Lambda$-val

$$|a_k| > |n-k| + 1.$$

Minden $k \in \Lambda$ kizár legfeljebb $2|a_k|$ rossz n-et. Az $|a_k| \leq k/2$ becslés alapján ezek mind nagyobbak $k - k/2 = k/2$-nél, tehát nagy N mellett $k \geq 2N$ már egyetlen $n \leq N$-et sem zár ki. A rossz n-ek száma N-ig ezért

$$\leq \sum_{\substack{k<2N \\ k\in\Lambda}} 2|a_k| \leq 2\sqrt{\sum_{\substack{k<2N \\ k\in\Lambda}} |a_k|^2 \Lambda(2N)} \leq 2\sqrt{M2N \cdot o(N)} = o(N),$$

és valóban majdnem minden n megmarad. A Tétel bizonyítását befejeztük.

Irodalom

1. Szegő, G., Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten, *Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften,* (1922), 88–91.
2. Dinghas, A., *Vorlesungen über Funktionentheorie,* Springer, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1961.
3. Szegő, G., Tschebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen, *Mathematische Annalen,* **87** (1922), 90–111.
4. Wiener, N., *The Fourier Integral and Certain of Its Applications,* Dover Publ., New York, 1933.

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Analízis Tanszék és

Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutatóintézete

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Matematikai Lapok

1993 / 4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 3. évfolyam (1993), 4. szám

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201–7656.

Előfizetési díj 1995-re 550 Ft+ÁFA, egyes szám ára 150 Ft+ÁFA.

* Megjegyzés: Korábbi előfizetőknek a lap ára az eddigi befizetés függvénye.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

TÁRSULATI HÍREK

Az 1991–92-es évi számokból sajnálatos módon kimaradt események:

Jelentés a Beke Manó Emlékdíj 1991. évi odaítéléséről

Az 1991. évi Beke Manó Emlékdíj bizottság: Surányi János (elnök), Gyulai Éva (titkár), Ács Katalin, Békefi Zsuzsa, C. Neményi Eszter, Pálmay Lóránt, Reményi Gusztávné, Scharnitzky Viktor két alkalommal (1991 március 1-jén és 1991 május 3-án) teljes részvétellel megtartott összejövetelén a díjak odaítélésére az alábbi döntést hozta:

1991-ben Beke Manó Emlékdíj *első fokozatában* részesíti:

dr. Hajnal Imre nyugalmazott középiskolai szakvezető tanárt;

1991-ben Beke Manó Emlékdíj *második fokozatában* részesíti:

Csahóczi Erzsébetet, a Budapesti Tanítóképző Főiskola Gyakorlóiskolájának vezető tanárát,

dr. Csorba Ferencet, a győri Hild József Építőipari Szakközépiskola tanárát,

dr. Papp Jánosné dr. Ádám Györgyit, a Békéscsabai Tanítóképző Főiskola tanszékvezető docensét,

dr. Puskás Albertnét, a Csongrád megyei Pedagógiai Intézet főmunkatársát,

Tusnády Gábornét, a XV. ker-i Dózsa György Gimnázium tanárát.

Indoklás

dr. Hajnal Imre egyetemi tanulmányait Szegeden kezdte, majd Budapesten folytatta, ahol matematika-fizika szakos tanári diplomáját 1950-ben kapta.

Öt évig a hódmezővásárhelyi Bethlen Gábor Gimnáziumban tanított, majd 1965-től nyugdíjazásáig a József Attila Tudományegyetem Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium szakvezető tanáraként tevékenykedett.

1961-ben „Kiváló tanár” kitüntetést, 1972-ben Beke Manó Emlékdíj II. fokozatát, 1983-ban Apáczai Csere János díjat kapott.

Tanári munkáját mindvégig sokrétű tevékenység jellemezte. A gyakorló iskola diákjaival színvonalasan foglalkozott, szakvezetőként sok tanárjelöltet indított el a pályán. Fontosak voltak az egyetemen tartott elemi matematikai gyakorlatai. Részt vett a fakultatív oktatást bevezető kísérletekben, több elemző tanulmányt készített. Számos előadást tartott különböző továbbképzéseken.

Kiemelkedő munkát végzett középiskolai tankönyvek írásában. A 80-as évek elején jelent meg a III. és IV. osztályok számára írt B fakultatív könyve és ehhez Nemetz Tiborral és Pintér Lajossal közösen tanári segédkönyvet is készített.

Tankönyvet írt a matematikai tagozatok I. osztálya számára, majd alaptantervű tankönyvsorozatot, tanári segédkönyvvel I-től IV. osztályig diákok és szaktanárok nagy örömére.

A Bolyai Matematikai Társulat felkérésére 1986-ban Beke Manó tanári munkásságáról tanulmányt készített.

Nyugdíjba vonulása óta is lankadatlanul dolgozik.

Hajnal Imrét eddigi munkája is a magyar középiskolai matematika-oktatás egyik meghatározó egyéniségévé teszi.

Csahóczi Erzsébet 1975-ben végzett a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskola matematika-fizika szakán. Először a Váli úti Általános Iskola felső tagozatos tanáraként dolgozott, majd részt vett az első magániskola megalapozásában.

Jelenleg a Budapesti Tanárképző Főiskola Gyakorlóiskolájában vezető tanárként segíti a tanárképzést. Tanári munkáját a szakmai igényesség, pontosság, a gyerekek gondolkodásának személyre szóló ismerete, tisztelete és optimális fejlesztés jellemzi. Pedagógiai légkörét a derű és a messzemenő tolerancia határozza meg. Az ismeretrendszer és a megválasztott feladatanyag érdekességével, gazdag élményanyaggal olyan színvonalat teremtett, hogy főváros-szerte híressé váltak szakkörei alsó és felső tagozaton egyaránt. Sokat foglalkozik a tehetségek felkutatásával, gondozásával matematikai táborokban, szakkörökön. Emellett azonban nagy felelősséggel keresi a sikeres tanulás módjait a leggyengébb tanítványai számára is.

1978-tól részt vett az új általános iskolai tantervet előkészítő kísérletben. Kísérleti tapasztalatait a felsős munkalapok társszerzőjeként is hasznosította. Szakköri munkájának eredményeit részben szintén társszerzővel, a Töprengő című sorozatban gyűjtötte össze, melynek óvodás és 3., 4. osztályos füzeteit használják már örömmel.

Szerepet vállalt a matematika iskolán kívüli terjesztésében, népszerűsítésében: dolgozott az Iskolarádió műsorainak előkészítésében, előadásokat tartott pedagógus továbbképzéseken, a TIT rendezvényein.

Tanári tapasztalatait a Nemzeti Alaptanterv koncepciójának és anyagának kidolgozásában is hasznosította.

dr. Csorba Ferenc 1973-ban fejezte be tanulmányait az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán matematika-fizika-ábrázoló geometria szakon.

Középiskolai tanári pályáját a győri Hild József Építőipari Szakközépiskolában kezdte, jelenleg is itt tanít. Iskolájának évek óta matematika szakkört és egyetemi előkészítő tanfolyamot tart. Kiemelkedő szakmai és pedagógiai munkájának elismeréseként 1984-ben szaktanácsadói kinevezésben részesült. Széleskörű kapcsolatokat épített ki az egyetemek matematika tanszékeivel. A szakterületek kiváló művelőit gyakran hívta előadásokra Győr-Moson-Sopron megyébe. A matematikatanítás színvonalának emelése céljából továbbképzéseket tartott kollégáinak. A szaktanárok önképzését segítette matematikai publikációival. Két kötetes egyetemi felvételi mérőlapokat szerkesztett tanárok és érettségiző középiskolások számára.

A Megyei Pedagógiai Intézet felkérésére az első és a második osztályos tanulók tudásszint méréséhez feladatsorokat készített. Jelenleg a III. és IV. évfolyam mérőlapjainak szerkesztésén dolgozik.

A Matematika Tanítása feladatmegoldó versenyének rendszeres résztvevője volt.

Tagja az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematikai bizottságának.

Az érettségi-felvételi matematikai írásbeli megyei szervezője, annak miniszteri biztosa.

A Bolyai János Matematikai Társulat győri tagozatának rendezvényein rendszeresen tart előadást, feladatmegoldó délutánt diákoknak és tanároknak.

A matematikai vándorgyűlések középiskolai szekcióinak feladatmegoldó szemináriumát vezette.

Díjazott pályamunkája: Válogatás a romániai középiskolai Matematikai Lapokból.

A középiskolai matematikával kapcsolatos fejlesztő munkája közismert a megyében és az országban.

dr. Papp Jánosné dr. Ádám Györgyi 1966-ban az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán a matematika-fizika szakon végzett. Pályáját középiskolai tanárként a békéscsabai Rózsa Ferenc Gimnáziumban kezdte, majd a szombathelyi Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskolán folytatta. Ottani működése alatt szerezte meg az egyetemi doktori címet. Jelenleg a Békéscsabai Tanítóképző Főiskola tanszékvezető docense.

Oktatói munkáját mindenütt példamutató lelkesedéssel, kiemelkedő szakmai hozzáértéssel, rátermettséggel és az új iránti fogékonysággal végzi.

A Bolyai János Matematikai Társulatnak évtizedek óta aktív tagja. Szombathelyi évei alatt az Országos Oktatási Bizottság munkájában vett részt. Ötleteivel, javaslataival, őszinte véleménynyilvánításával segítette a bizottság munkáját.

Miután Békés megyébe került, rövid időn belül a megyei tagozat elnökévé választották. Ebben a tisztségében is lelkiismeretesen tevékenykedik, sokat tesz a társulati élet fellendítésért, a matematika népszerűsítésért.

A Tanítóképző Főiskola diákjaival, illetve Békés megye aktív tanítóival megismerteti az új tanítási módszereket, azok kipróbálásában a modern eszközök megismertetésével segíti munkájukat.

dr. Puskás Albertné 1972-ben végezte Szegeden a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola matematika-fizika szakát. 1978 óta folyamatosan tanítja Varga Tamás koncepciója alapján a matematikát Tápén, majd Szegeden. Jelenleg a Csongrád megyei Pedagógiai Intézet főmunkatársa, ahol a természettudományok összefogásáért felelős és óraadó a szegedi Radnóti Gimnáziumban.

Tanárként sokat fáradozott azon, hogy a tehetségeket felfedezze, gondozza városi illetve megyei szinten. Hogy a felzárkóztatás folyamatát segítse, több kísérletet tervezett és vezetett.

Módszertani kiadványok, feladatgyűjtemények szerzője. Kollégáinak önképző, továbbképző köröket szervezett. Feladatmegoldó szemináriumot vezetett a Bolyai János Matematikai Társulat Rátz László Vándorgyűlésein, valamint a TIT keretein belül levelező feladatmegoldó versenyeket indított útjára. Sokat jelentett segítő munkája a Bolyai János Matematikai Társulat új általános iskolai versenyének vidéken történő népszerűsítésében.

Díjazott pályamunkái: „Differenciált képességfejlesztés matematika órán", illetve „A dolgozók általános- és szakképző iskolája esti tagozatának tantervi koncepciója".

Eredményesen foglalkozott a számítástechnika általános iskolai meghonosításával, programjai díjat nyertek a számítástechnikai pályázatokon.

Szakmai felkészültségét, hatalmas munkabírását, elhivatottságát igazolja, hogy a Magyar Tehetséggondozó Társaság alapító tagja.

Tusnády Gáborné matematika-fizika-ábrázoló geometria-számítástechnika szakos tanár. 1964 óta dolgozik Budapesten a XV. ker-i Dózsa György Gimnáziumban, melynek egykor tanulója is volt. Jelenleg a gimnázium igazgatóhelyettese.

Jól képzett szaktanár, tudása kiemelkedő, állandó az önképzési igénye. Szakmai igényessége magas fokú emberséggel, segítőkészséggel, a tanulók problémáinak megértésével társul.

1978-tól a Magyar Rádió Ifjúsági ismeretterjesztő műsorainak külső munkatársa. Az „Új matekot tanul a gyerek" című szülőknek készített sorozat műsorvezetőjeként debütált. Amikor kiderült, hogy a játékos rejtvényekre mennyi megoldás érkezik, megszületett Homo Ludens című műsora. A számítógépek megjelenésével egy időben elindított MIKRO-fon műsorsorozatban jól hasznosította a számítástechnika iránti érdeklődését és e téren gyűjtött tanítási tapasztalatait. Amikor Imrecze Zoltánné nem tudta tovább vállalni a Törd a fejed! című műsor szakértő-műsorvezető munkáját, átvette a nagy múltú műsort és több éven át sok száz általános iskolás gyerek írta megoldásait Tusnády Kati néninek és hallgatta tanácsait, bátorító dicséreteit. Sokan közülük később középiskolai versenyek helyezettjei lettek. Pályáját a hűség jellemzi: hűség szaktárgyaihoz, elsődlegesen a matematikához, a pedagógiához és az iskolájához.

Jelentés az 1991. évi Farkas Gyula Emlékdíj odaítéléséről

Illés Tibor egyetemi tanulmányait az Eötvös Loránd Tudományegyetemen matematikus szakán folytatta. 1987-ben végzett, de előtte már két éven át demonstrátorként az Operációkutatási Tanszéken dolgozott. Az egyetem elvégzése után az MTA SzTAKI Alkalmazott Matematikai Főosztályára került, ahonnan Jugoszláviában letöltendő katonai szolgálatának az idejére 1989 szeptemberében távozott. Visszatérése után, 1990 augusztusától az Operációkutatási Tanszék tudományos munkatársa.

Tehetséges matematikus, aki az egyetem elvégzése óta aktív tudományos tevékenységet folytat. Elméleti kutató tevékenysége kezdetben a véges projektív síkok elméletével, később geometriai és diszkrét programozási problémákkal volt kapcsolatos. A két területen szerzett ismereteit ügyesen tudta összekapcsolni, miáltal szép új tudományos eredményeket ért el. Maximális erős reprezentáns rendszerek és minimális halmazok a véges projektív síkokon című egyetemi doktori disszertációját 1989-ben summa cum laude minősítéssel védte meg. Elméleti eredményeit nívós folyóiratokban publikálta. Összesen 10 cikke jelent eddig meg.

Elméleti kutatásai mellett az MTA SzTAKI-ban töltött évek alatt bekapcsolódott az ott folyó alkalmazási munkákba is. Ezt a tevékenységet több társszerzővel közösen publikált beszámoló jelentés bizonyítja. A legutóbbi idők során szép alkalmazási eredményeket ért el a festék keverés általa kidolgozott matematikai modelljével. Ezen tevékenységei során bizonyította, hogy különféle mérnöki szakmák képviselőivel hatékony együttdolgozásra képes és a szó legjobb értelmében vett alkalmazott matematikus válhat belőle.

Aktivitását bizonyítja az is, hogy néhány év alatt tíznél több tudományos konferencián vett részt, melyek között több igen színvonalas nemzetközi operációkutatási konferencia is található. Több alkalommal tartott előadást is.

Hujter Mihály az ELTE TTK matematikus szakán végzett 1981-ben Felsőoktatási Érdemérem kitüntetéssel. Ezután az MTA SzTAKI akadémiai ösztöndíjasa, majd a Rutgers University Ph.D. ösztöndíjasa volt 1983/86-ban operációkutatás témában. Ezután az MTA SzTAKI Alkalmazott Matematikai Főosztályán tudományos munkatársként dolgozott 1991. januárjáig. Azóta a Miskolci Egyetem Matematikai Intézet Alkalmazott Tanszékének egyetemi adjunktusa.

Eddig 23 dolgozata jelent meg, 2 dolgozata van megjelenésre elfogadva és benyújtott további 3 dolgozatot. Megjelent munkáira 47 hivatkozása van. Fő kutatási területe a geometriai elhelyezésekhez kapcsolódó kombinatorikus optimalizálási problémák vizsgálata. Egyetemi doktori értekezését egy ütemezéselméleti problémáról írta. Értekezésének fő eredménye M.R. Garey, D.S. Johnson, B.B. Simons és R.E. Tarjan egy 1981-es eredményének általánosítása. Az eredeti eredmény egygépes ütemezési probléma polinomiális idejű megoldhatóságát mondja ki azon feltevés mellett, hogy a munkavégzési idők egyenlőek. Értekezésében azt igazolta, hogy a munkavégzési idők egyenlőségét csak bizonyos munkákra kell feltenni. Több dolgozatában vizsgált fontos gráfelméleti kérdéseket. Egyik fontos, Hedetniemi és Laskar által is hivatkozott eredménye egy alsó becslés az irredundancia számra. Egy Bíró Miklóssal és Tuza Zsolttal közös dolgozatában egy gráfszínezés-kiterjesztési problémát vizsgál, amelynek az egyik eredménye a MALÉV menetrend tervezési programjában is alkalmazást nyert. M. Farberrel és Tuza Zsolttal közösen írt dolgozatában részleges megoldást ad Balas és Yu egy sejtésére klikkek számáról gráfokban. Blázsik Zoltánnal, Pluhár Andrással és Tuza Zsolttal közösen karakterizálták a gráfok azon osztályát, amelyek nem tartalmaznak sem feszített négyszöget, sem pedig annak komplementerét. A Frobenius problémára adott alsó becslése a Shellsort algoritmus gyorsításánál alkalmazható. Vízvári Bélával közös munkájukban új egzakt formulákat adtak meg a három dimenziós Frobenius-problémára, valamint kombinatorikus algoritmusokat konstruáltak a probléma megoldására. Az egészértékű hátizsák feladat megoldásainak számára Hujter Mihály javított becsléseket adott meg.

Számos gyakorlati alkalmazási feladat megoldásában vett részt, amelyek közül említésre érdemesek a következők: DAIDALOS programrendszer csődarabolás optimizálására (IKARUSZ, 1987), WorkShopMan menedzserképzésben alkalmazható programrendszer (UNIDO, 1988) SLOGAN kőolajfúrási eredményeket kiértékelő programrendszer (SZKFI, 1988-90).

Az operációkutatás témakörében eddig négy egyetemen végzett tevékenységet és emellett 12 szakdolgozat elkészítését irányította.

Az 1991. évi Grünwald Géza Emlékdíj kiosztásának indoklása

Károlyi Gyula 1982-től 1987-ig volt az ELTE TTK matematika szakos hallgatója. Ez idő alatt kétszer nyert harmadik díjat és egyszer kapott dícséretet a Schweitzer Miklós matematikai versenyen.

1987-től 1989-ig tudományos ösztöndíjas volt Beck József vezetése alatt „partíciók irregularitásai" témából.

1989-ben az ELTE TTK Algebra és Számelmélet tanszékére került, az 1989-1990 években mint „levelező ösztöndíjas". 1990 óta az Algebra és Számelmélet Tanszéken tanársegédként van alkalmazásban. A Tanszéken önálló speciális előadást tart a kommutatív algebrák témakörében.

Kandidátusi disszertációját lényegében elkészítette. Disszertációjának témája a geometria diszkrepancia-elmélet.

Károlyi Gyula dolgozatai kandidátusi disszertációjához kapcsolódnak; és jórészt azzal együtt készülnek:

1. On point covers of parallel rectangles. *Periodica Math. Hung.*, (1991), megjelenés alatt.
2. Doubly transitive permutation groups with abelian stabilizers. (Kovács Sándorral és Pálffy Péter Pállal együtt) *Aequationes Mathematicae,* **39** (1990), 161–166.

Előkészületben:

3. On the two coloring of the rotated square grid.
4. Decomposition of polytopes of a special type (Lovász Lázlóval).
5. Geometric discrepancy theorems in higher dimensions.
6. On the discrepancy of homothetic convex bodies.

Kiemelkedőek a geometria diszkrepancia-elmélettel foglalkozó 5. és 6. dolgozatok. Ezekben olyan konvex politopok diszkrepanciáját vizsgálja R^d-ben, amelyek lapjai véges sok adott hipersíkkal párhuzamosak. E becslések a 4. dolgozat eredményére is Támaszkodnak. Ebben azt a Beck Józseftől származó kérdést vizsgálja, hogy mikor bontható fel egy konvex politop olyan szimplexek előjeles összegére, melyek lapjai a politop lapjaival párhuzamosak.

Károlyi Gyula két konferencián vett részt:1. Research Group and Workshop On Irregularities of partitions (Bielefeld, 1991). 2. Intuitive Geometry (Szeged, 1991). Mindkét konferencián beszámolt eredményeiről; amelyeket nagy érdeklődés kísért.

Jelentés az 1991. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítéléséről

A Rényi Kató Emlékdíj bizottság 1991. december 5-i ülésén az alábbi döntést hozta:

I. fokozatban és fejenként 3.200 Ft pénzjutalomban részesíti

Kós Gézát, az ELTE TTK 1991-ben végzett hallgatóját,

Makay Gézát, a JATE 1991-ben végzett hallgatóját és

Pintár Ákost, a KLTE 1991-ben végzett hallgatóját

II. fokozatban és fejenként 1.600 Ft jutalomban részesíti

Boros Zoltánt, a KLTE 1991-ben végzett hallgatóját,

Jordán Tibort, az ELTE TTK 1991-ben végzett hallgatóját,

ifj. Katona Gyulát, az ELTE TTK 1991-ben végzett hallgatóját,

Montágh Balázst, az ELTE TTK 1991-ben végzett hallgatóját,

Muzsnay Zoltánt, a KLTE V. éves hallgatóját és

Frank Strzyzewskyt, a BME 1991-ben végzett hallgatóját.

Indoklás

Kós Géza két díjazott TDK-dolgozatot írt: „Convex discs can cover their shadows" címen Törőcsik Jenővel közösen, melyre az országos TDK-konferencián III. díjat kapott; valamint „Egy Kürschák-feladat általánosítása" címen, melyre országos II. díjat kapott. Az első dolgozat megjelent a Discrete and Computational Geometry c. lapban. Ezeken kívül megjelenés alatt van egy Takácsi-Nagy Pállal közösen írt cikke (Modulo 2 decomposition of graphs). Schweitzer Miklós versenyen 88-ban első díjat, 89-ben dicséretet kapott, a Belgrádi Nemzetközi Versenyen 88, 89, valamint 90-ben első díjat, a Csehszlovákiában rendezett nemzetközi versenyen 87-ben III., 88-ban I., 89-ben pedig II. díjat kapott. Jelenleg analitikus számelmélettel foglalkozik.

Makay Géza a differenciálegyenletek elméletében, közelebbről a funkcionál-differenciálegyenletek stabilitásának kérdésében publikált három dolgozatot: (az American Mathematical Monthly-ban megjelenő dolgozatában) egy klasszikus tételre ad szellemes, új bizonyítást, egy 30 éves stabilitáselméleti kérdést old meg; (a Nonlinear Analysisben megjelent dolgozatában) illetve aszimptotikus stabilitással kapcsolatban ér el figyelemre méltó eredményeket.

Pintér Ákos több fontos és mély eredményt ért el Stirling-számok diofantikus tulajdonságaival, valamint függvénytestek feletti diofantikus egyenletekkel kapcsolatban. Eredményeit kilenc dolgozatban publikálta. Munkáiban lényegesen általánosít ill. élesít több korábbi, neves matematikusok által elért eredményt. Újabban szép eredményeket nyert hatványösszegekkel, ill. faktoriális polinomokkal kapcsolatos diofantikus problémákra vonatkozóan. Ezek a munkái még nincsenek publikálva.

Boros Zoltán a KLTE 1991-ben végzett hallgatója, aki intervallumkitöltő sorozatoknak valamennyi eddig vizsgált osztályánál szélesebb osztályára terjesztette ki a korábban ismert jellemzéseket és linearitási tételeket.

Jordán Tibor két díjazott TDK-dolgozatot írt: „Irányított körök fa-reprezentációja" címen, melyre az egyetemi TDK-konferencián I. díjat kapott (országoson még nem volt); valamint „Gráfok erősen konzervatív súlyozásáról" címen (Szigeti Zoltánnal közösen), melyre egyetemi II. díjat kapott. Az első dolgozat megjelenés alatt van az idei Seattle-i konferencia kötetében. Ezeken kívül megemlíthetjük Szigeti Zoltánnal közösen írt egyetemi jegyzetét (Szubmoduláris függvények), mely a jegyzetpályázaton I. díjat kapott. Jelenleg kombinatorikus optimalizálással foglalkozik (dolgozatai is ebben a témában születtek).

ifj. Katona Gyula két díjazott TDK-dolgozatot írt „f-Hamilton körök keresése" címen, melyre az országos TDK-konferencián III. díjat kapott; valamint „Néhány NP-teljes probléma változata" címen, melyre szintén országos III. díjat kapott. Az első dolgozat megjelenés alatt van a Combinatorica c. lapban. Ezeken kívül megemlíthetjük Recski Andrással közösen írt egyetemi jegyzetét (Bevezetés a véges matematikába). Jelenleg algoritmikus gráfelmélettel foglalkozik (dolgozatai is ebben a témában születtek).

Montágh Balázs két díjazott TDK-dolgozatot írt: „Egy régi kombinatorikafeladat új megoldása és általánosításai" címen, melyre az országos TDK-konferencián I. díjat kapott; valamint „Néhány helyen előírt Abel-csoport-automorfizmusok létezéséről" címen, melyre szintén országos I. díjat kapott. Ezenkívül megjelent egy dolgozata „A short proof and a generalization of an old result of Cheng and Feller" címen a Discrete Mathematics c. lapban. Jelenleg algebrai struktúrák automorfizmusaival, valamint hipergráfok elméletével foglalkozik.

Muzsnay Zoltán a differenciálgeometria elméletében ért el publikálásra méltó eredményeket: explicit összefüggést talált az eredeti és a pull-back pszeudokonnexió görbülete és torzója között; az indukált Finsler konnexió görbületét vissza vezette lineáris konnexiók görbületére, illetőleg ha utóbbi metrikusok és ráadásul az egyik torziómentes, akkor előbbi is metrikus.

Frank Strzyzewsky a BME 1991-ben végzett hallgatója. A kutatási területe az integrált áramkörök többrétegű huzalozására szolgáló algoritmusok matematikai elmélete. E témában Recski Andrással közösen írott cikkében lineáris algoritmust adott a kétrétegű csatornahuzalozásra tetszőleges specifikáció esetén.

Jelentés a Szele Tibor Emlékérem 1992. évi odaítéléséről

1992-ben a bizottság döntése alapján *Tamássy Lajos* kapja a Szele Tibor Emlékérmet.

Indoklás: Fő kutatási területe a differenciálgeometria. Ezen belül kiemelkedő tudományos eredményeket ért el a tenzori összefüggések körében, a konnexió elméletben, a Finsler geometriában, a Minkowski geometriában és az areál terek elméletében.

Tudományos munkássága széleskörű nemzetközi elismerést váltott ki. Egy évig vendégprofesszor volt New Yorkban. A világ számos helyén, egyebek között Japánban, az USA-ban, Németországban, Csehszlovákiában és Romániában tartott meghívás alapján előadásokat. 1977-ben egy órás előadás tartására kérték fel a Japán Matematikai Társaság Kongresszusán Tokióban. M. Matsumoto professzor, a japán iskola vezetője, valamint több más külföldi szaktekintély hónapokat töltött el a KLTE Matematikai és Informatikai Intézetben, hogy közös kutatásokat végezzen Tamássy professzorral. 1985-ben Japánból egy matematikus Tamássy professzorhoz Debrecenbe jött el doktorálni.

Oktatómunkáját a magas szakmai színvonal és a nagyfokú igényesség jellemzi. Mint tanszékvezető 15 éven át szervezte és irányította a geometria, elsősorban a differenciálgeometria oktatását. Háromkötetes „Differenciálgeometria" jegyzetét a hallgatók több mint egy negyedszázada használják. 25 éve igen eredményesen foglalkozik tehetséges hallgatókkal. Diákkörös hallgatói a vezetése alatt szép sikereket értek el az Országos Diákköri Konferenciákon.

Tamássy Lajos munkásságának egyik legkiemelkedőbb eredménye a Varga Ottó által alapított, majd később Rapcsák András által vezetett debreceni differenciálgeometriai iskola továbbvitele. Tamássy Lajosnak az utóbbi évtizedben sikerült a vezetése alatt dolgozó differenciálgeometriai kutatócsoport kutatásait a klasszikus (lokális) vizsgálatokról a modern (globális) vizsgálatokra átállítani. Tamássy Lajos érdeme, hogy a debreceni iskola megmaradt a magyarországi differenciálgeometriai kutatások nemzetközileg is elismert centrumának. Az irányítása alatt és segítségével 6 egyetemi doktori disszertáció (Bácsó Sándor, Szilasi József, Kozma László, Kovács Zoltán, Kis Béla, H. Shimada /Japán/), valamint 5 kandidátusi értekezés (N.V. Tu, Bácsó Sándor, T.Q. Binh, Szilasi József, Kozma László) született. Jelenleg két aspiránsa (Kovács Zoltán és Kis Béla) készíti kandidátusi disszertációját, és egy kezdő aspiráns (Muzsnay Zoltán) munkáját irányítja. Tanítványai közül többen részesültek Grünwald Géza és Rényi Kató díjban. Segíti és szakmailag irányítja az elhunyt Moór Arthur soproni differenciálgeométer tanítványait.

Jelentés a Beke Manó Emlékdíj 1992. évi odaítéléséről

Az 1992. évi Beke Manó Emlékdíj bizottság tagjai: Surányi János (elnök), Hajnal Imre (titkár), Ács Katalin, Békefi Zsuzsa, C. Neményi Eszter, Pálmay Lóránt, Reményi Gusztávné, Scharnitzky Viktor voltak. A bizottság két alkalommal (1992. február 14-én és április 21-én) teljes részvétellel megtartott összejövetelén a díjak odaítélésére az alábbi döntést hozta:

1992-ben a Beke Manó Emlékdíj *első fokozatában* részesíti

dr. Laczkovich Miklóst, Eötvös Loránd Tudományegyetem Analízis Tanszék tanárát.

a Beke Manó Emlékdíj *második fokozatában* részesíti

Gy. Molnár Lajost, a kisújszállási Móricz Zsigmond Gimnázium nyugalmazott tanárát,

Káldi Évát, a győri Apáczai Csere János Tanítóképző Főiskola Gyakorló Általános Iskolájának tanítóját,

dr. Surányi Lászlót, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium tanárát,

dr. Szabó Jánosnét, a békéscsabai Széchenyi István Közgazdasági Szakközépiskola tanárát,

dr. Varecza Árpádot, a nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskola tanszékvezető tanárát.

Indoklás

dr. Laczkovich Miklós középiskolai tanulmányait a Fazekas M. Fővárosi Gyakorló Gimnáziumban, az elsőként induló speciális matematikai osztályban végezte. Számos díjat nyert hazai és nemzetközi matematikai versenyeken. 1971-ben szerzett matematikus oklevelet az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, azóta az egyetem Analízis Tanszékén dolgozik.

Oktató és kutató munkája mellett komolyan foglalkozik a tanárok munkájának segítésével. Többször tartott előadást, előadássorozatot a Fővárosi Pedagógiai Intézet tanári továbbképző tanfolyamain, illetve a Tudományos Ismeretterjesztő Társulat keretében, továbbá a speciális matematikai osztályok tanárainak nyári konferenciáin. Ezek — a résztvevők megítélése szerint — segítették őket mind ismereteik bővítésében, mind a matematikai gondolkodásmód tudatos fejlesztésében. Igen hasznos előadásokat tartott a Társulat tanári vándorgyűlésein. Tanároknak szóló angol nyelvű előadássorozatban is részt vett.

A tanárszakos hallgatókra igen jelentős a hatása. Erre a gyakorló tanárjelölteket vezető tanárok figyeltek fel. Előadásain és gyakorlatain a nehéz témákat is szemléletessé, érdekessé tudja tenni, így tanítványai későbbi tanítási gyakorlatukban a tőle tanultakat jól tudják alkalmazni. A síkidomok átdarabolása terén elért eredménye nagy nemzetközi érdeklődést keltett.

Mint évfolyamfelelős, érdemben foglalkozik a hallgatók ügyes-bajos dolgaival is, példát adva ezzel a későbbi osztályfőnöki munkához. Éveken keresztül ő volt az Eötvös Kollégium matematika tanára, foglalkozásait ott is nagyon szerették. Az „Útközben" című időszakos szakdidaktikai kiadványban a függvény-fogalom kialakulásáról jelent meg cikke.

A matematika szakos tanárképzés megjavításáért, reformjáért igen sokat fáradozik.

Gy. Molnár Lajos a kisújszállási Móricz Zsigmond Gimnázium nyugalmazott tanára, aki még ma is folytatja tanári munkáját. 1937-ben szerzett tanítói oklevelet és munkásságát Kunhegyesen kezdte meg. 1947-ben az elsők között jelentkezett a szaktanítói átképzésre. 1951-ben az Eötvös Loránd Tudományegyetemen kezdte meg egyetemi tanulmányait levelező tagozaton. Ott szerzett tanári diplomát. 1952-ben nyert áthelyezést Kisújszállásra, a Móricz Zsigmond Gimnáziumhoz. Azóta — 40 éven keresztül ott tanít.

Tanítványai, kollégái a következő mondatokkal jellemzik munkásságát:

„Tanárok, mérnökök generációi köszönhetik mindannyiónk „Lajos Bácsijának", hogy közel kerültek a matematikához és sokan hivatásnak is választották tanítását. Megnyerő személyisége, tiszteletet parancsoló közvetlensége azonnal hatással van tanítványaira. Nincs az a pillanat, amikor ne osztaná meg szívesen tudását, rendszerezett tapasztalatait, ötleteit tanítványaival és kollégáival. Most, 75 évesen is folyamatosan képezi magát, havonta megoldja a Középiskolai Matematikai Lapok gyakorlatait, frissen tartja gondoskodását. Mi, akik tanítványai voltunk és kollegái lehetünk, csodáljuk, hogy bármilyen problémával keressük meg, hamar kiderül: az ötlet, amelyet tőle kapunk, használható, sőt sokszor az egyetlen lehetséges út.

Iskolánk tagozatos oktatása az Ő tanári tudására, a város és környezete elismerésére alapozódott.

Sohasem került tanítványaival konfliktusba. Csak tanulói szemmel tudott közelíteni minden feladathoz és arra nevelte tanítványait, hogy ne legyenek elbizakodottak, a matematika sokkal nagyobb annál, mintsem valaki azt birtokolhatná. A tudomány iránti mély tisztelet minden szaván, cselekedetén átsüt. Így lehet a mai napig mindannyiónk példaképe."

Kollégáinak ezek a sorai egy tanári alkotó életnek igazi elismerései.

Káldi Éva a győri Apáczai Csere János Tanítóképző Főiskola Gyakorló Általános Iskolájában tanító. A Pécsi Tanárképző Főiskolán tanult, majd az Eötvös

Loránd Tudományegyetem fizika kiegészítő szakán folytatta tanulmányait. 22 éve tanít, szinte kezdettől fogva gyakorlóiskolában.

Már tanárjelölt korában érdeklődéssel foglalkozott a természettudományos nevelés kérdéseivel, erről elsődíjas pályamunkát írt. A korszerű matematikatanítás érdekében dolgozik. Részt vett a 4. osztályos matematika tankönyv készítésében és folyamatban van a kézikönyv kiadása is. Rendszeresen publikál szakmai folyóiratokban.

Tanári munkájának korszerűsége, eredményessége állandó önképzésből és hivatásszeretetből fakad. Tanítványai rendszeresen díjat nyernek a városi és megyei versenyeken.

Személyiségét, pedagógus egyéniségét legfőképpen a gyerekeket szerető és elfogadó, testi-lelki-szellemi fejlődésüket értő szolgálat jellemzi. Óráin nem marad hiba javítatlan, anélkül azonban, hogy a hibázó tanulóra terelődne a figyelem. Nem marad fontos állítás indokolás nélkül és szép indoklás anélkül, hogy ne irányította volna a figyelmet az értékeire. Óráin a játékosság egyetlen mozzanatában sem öncélú, fontos szerepet tölt be a gondolkodás fejlesztésében, tapasztalatszerzésben.

Munkája okosan megtervezett és célszerűtlen külsőségektől mentes, hiteles tanári munka. ez biztos szakmai felkészültségen alapszik. Szerénységével és ugyanakkor határozott, tudatos nevelő-fejlesztő magatartásával a tanítójelöltek számára is nagyon értékes mintakép.

dr. Surányi László 1972-ben, az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematikus szakán szerzett diplomát. Kezdetben a Matematikai Kutató Intézetben dolgozott, 1977-ben doktorált. Alkotó matematikusként kombinatorikával, gráfelmélettel, halmazelmélettel foglalkozott, cikkeket írt.

Az oktatás mindig vonzotta, tanári diplomát is szerzett. Korábban a speciális matematika tagozatos tanulóknak szakköröket tartott, majd 1982-től a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Iskola gimnáziumi osztályaiban tanít, 1986-tól vezető tanárként.

Tanítványaival munkatársi kapcsolatot alakít ki. Fő célja a problémamegoldó gondolkodásra nevelés. Tanítványaival egyénileg is foglalkozik, fejlődésüket rendszeresen figyeli. Tanítványainak versenyeredményei kiemelkedőek. Az elmúlt évben mind a Kürschák verseny, mind az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny legjobbjai között legtöbben az ő osztályának tanulói voltak. Tavaly a 6 magyar diákolimpikonok közül 5 az ő növendéke volt. Közismert, hogy a kiváló tanulókkal való foglalkozás igen komoly felkészülést igényel, mivel a nehéz feladatok, problémák a jó képességű tanulókban számos kérdést vetnek fel, a külső szemlélő számára váratlan megoldások születhetnek. Ő ezekre tudatosan készül, a tanulók kérdéseit, megoldásait azonnal átlátja, reagál rájuk, megerősít vagy ellenpéldát ad. A matematika minden ágában otthonos.

Vezető szerepet játszik a speciális tantervű osztályokban tanító tanárok segítésében, továbbképzésében.

Mély műveltségű, szerény egyéniség, igazi tudós tanár, aki az irodalomban, a filozófiában, a művészetekben egyaránt járatos. Tanításában, továbbképzési előadásain mindezeket jól hasznosítja.

dr. Szabó Jánosné a békéscsabai Széchenyi István Közgazdasági és Külkereskedelmi Szakközépiskola tanára. Diplomáját 1964-ben szerezte Szegeden a József Attila Tudományegyetemen. Tanári munkásságát Mosonmagyaróváron kezdte, 1969-től dolgozik jelenlegi iskolájában.

Tanítási, nevelési tevékenységét az egyéniségéből fakadó módszeresség, megbízhatóság jellemzi. Nyugodt, kiegyensúlyozott, nem ragadtatja magát szélsőségekre. Ennek köszönhető, hogy diákjai szeretik, megbíznak benne. Magyarázatai könnyen és jól érthetők, követelményeiben igényes, következetes. Kitűnő érzékkel alkalmazza a megfelelő pedagógiai eszközöket: a dicséretet, a biztatást, az elmarasztalást.

Szereti és képes megszerettetni a matematikát. Kitartóan, türelmesen neveli tanítványait a problémák felismerésére és sikeres megoldására. Diákjai rendszeresen jól szerepelnek az érettségin, felvételin, valamint a matematika versenyeken.

Jelleméből nem tűnt el a matematikával, illetve a tanítással szembeni alázat, nem hunyt ki a lelkesedés. Éppen úgy tud örülni a feladatmegoldás során egy-egy ötletnek, mint versenyzői legnagyobb sikereinek. Képes óráról-órára megteremteni azt a varázst, amely a tanítás lényege és amelyre csak kevesek képesek igazán.

Szerény és csendes, mégis évek óta meghatározó szerepet játszik a tantestületben. A matematika tanárok munkaközösségét irányítja, azaz inkább segíti. Kollégáinak — bármikor fordulnak is hozzá — mindig megértően segít.

Tantestületében nemcsak szakmai, pedagógiai munkásságát ismerik el és tisztelik, hanem szeretik is bölcs emberségességét, kiegyensúlyozott, derűs egyéniségéért.

dr. Varecza Árpád Nyíregyházán a Bessenyei György Tanárképző Főiskolán tanszékvezető főiskolai tanár. 1963-ban Szegeden általános iskolai, 1966-ban Budapesten, az Eötvös Loránd Tudományegyetemen középiskolai tanári oklevelet szerzett. Tanított általános és középiskolában, majd 1969-től a nyíregyházi főiskola a munkahelye. 1975-ben egyetemi doktori, 1982-ben kandidátusi fokozatot szerzett.

Oktató-nevelő munkája, matematikát népszerűsítő tevékenysége sokrétű. Főiskolai oktatóként elejétől kezdve szorgalmazta az új, modern matematika oktatásának bevezetését, a korszerű szemlélet kialakítását, mind a gyakorló iskolákban, mind a megye iskoláiban. Ehhez elméleti és módszertani segítséget is nyújtott. Tapasztalatait, ötleteit számos dolgozatban közölte a Módszertani Közleményekben és A Matematika Tanításában. Rendszeresen tartott és tart tanári továbbképzéseken előadásokat, bemutató tanításokat. Ezek témája főként algebra, kombinatorika, gráfelmélet. A továbbképzések tapasztalatairól kerekasztal-beszélgetéseket vezetett vándorgyűléseken.

Külön figyelmet fordított és fordít ma is a tehetséggondozásra. Kezdetben általános iskolai tanulók számára vezetett szakköröket, középiskolai tanulók számára pedig matematikai délutánokat, majd kezdeményezésére központi szakkörök alakultak. Két éve levelező formában szervezett tehetséggondozást. Főiskolai hallgatók számára versenyelőkészítő feladatmegoldó diákkört tartott. Tagja és több alkalommal titkára volt a főiskolai versenyek szervezőbizottságának. Rendszeresen állít össze feladatjavaslatokat a versenyekre.

„Főiskolai matematikai versenyek" címmel (Bereznai Gyula társszerzővel) eddig három könyve jelent meg. Ezeket a munkákat középiskolai tanulók, főiskolai és egyetemi hallgatók egyaránt jól hasznosíthatják.

Jelentés az 1992. évi Farkas Gyula Emlékdíj odaítéléséről

A Bolyai János Matematikai Társulat Farkas Gyula díjbizottsága 1992. november 23-án a következő döntést hozta:

a beérkezett javaslatok közül ketten,

Dr. Gyökér Solt és

Dr. Keresztfalvi Tibor kapjanak díjat.

Indoklás

Gyökér Solt 1983-ban végzett a Budapesti Műszaki Egyetem matematikus-mérnök szakán (kitüntetéses oklevéllel). Elnyerve a Magyar Tudományos Akadémia 3 éves TMB-ösztöndíját a BME Gépészkari Matematika Tanszékén folyatott kutatómunkát. Ennek során több konferencián vett részt, publikációi jelentek meg, majd kitűnő eredménnyel letett vizsgái után megírta egyetemi doktori értekezését. Kutatási területe: a közönséges differenciálegyenletek elmélete, ezen belül bifurkációelmélet, különös tekintettel a populációdinamika alkalmazási területeire. A tanszéken ma mint adjunktus működik, kiterjedt oktatási tevékenységet folytat (idegen nyelven is): közönséges, parciális differenciálegyenletek, differenciálgeometria és vektoranalízis, numerikus módszerek.

Keresztfalvi Tibor 1986-ban végzett az ELTE TTK fizikus szakán jeles diplomával. Végzés után az ELTE Számítóközpontban programtervezőként kezdett dolgozni, de egyidejűleg bekapcsolódott az Alkalmazott Analízis Tanszék oktatómunkájába is, elsősorban a fizikus szakon vezetett analízis gyakorlatot. Oktatómunkáját kiegészítette a fizikusok számára készült Analízis jegyzet egyik kötetének írásával is. A jegyzet sikerét jellemzi, hogy ma már nemcsak a fizikus szakon használják.

A kutatómunkába intenzíven csak a másfél éves katonaság után tudott bekapcsolódni. A fuzzy halmazok körében olyan kutatásokat végzett, amelyek az elmélet szigorúbb matematikai megalapozásához voltak rendkívül fontosak. Eredményei, melyeket folyamatosan publikált, nemzetközileg is elismertek. Különösen kiemelkedő eredménye a Nguyen tétel általánosítása, ez több hivatkozást is kapott, és a fuzzy halmazokkal végzendő műveletek matematikai megalapozását adja. Jó eredményeket ért el a fuzzy lineáris programozás és többkriteriumú optimalizálás terén is. Ezek az eredményei a frankfurti egyetemen DAAD-ösztöndíjasként végzett kutatómunkájához kapcsolhatók. Kutatási eredményeit 1991-ben egyetemi doktori értekezésben foglalta össze, melyet summa cum laude minősítéssel védett meg.

Jelenleg a főként ún. „approximate reasoning" területén végez kutatómunkát, kapcsolva azt a fuzzy döntésanalízis témájához. Több benyújtott cikke vár opponálásra.

Számítástechnikai ismeretei rendkívül jók. Kutatási eredményeinek számítógépes realizálásával is foglalkozik.

Az ELTE Számítóközpont átszervezését követően került az Alkalmazott Analízis Tanszékre. Jelenleg meghívott kutatóként (egyéves időtartamra) a Frankfurti Egyetemen dolgozik.

Jelentés az 1992. évi Grünwald Géza Emlékdíj odaítéléséről

1992-ben Grünwald Géza Emlékdíjat és 9.000–9.000 Ft-ot kap Makay Géza és Szenes András.

Makay Géza 1991-ben végezte a JATE matematikusi szakát, majd tanársegédként maradt a JATE Bolyai Intézet Analízis Tanszékén. Jelenleg a Southern Illinois University-n Ph.D. diák Carbondale-ben. Elsősorban funkcionál-differenciálegyenletek stabilitásvizsgálatával foglalkozik. Mivel ezeknek az állapottere végtelen dimenziós függvénytér, a szokásos kompaktsági meggondolások nem alkalmazhatók. A nehézséget fokozza, hogy különböző, nem összehasonlítható normákkal kell dolgozni. Szellemes ellenpéldával mutatta meg, hogy az aszimptotikus stabilitásra vonatkozó egyik alaptételből egy kellemetlen korlátossági feltétel nem hagyható el, ezzel egy 30 éve nyitott problémát oldott meg.

Szenes András 1986-ban végezte el az ELTE matematikus szakát, ezután a Harvard Egyetemen szerzett Ph.D.-t. Először a nem kommunikatív differenciálgeometria (operátor K-elmélet) területén dolgozott. Getzler-rel bebizonyította a JLO kociklus homotópia invarianciáját és az ebből következő index tételt. Ezután érdeklődése az algebrai geometria és topológia területei felé fordult. S1(2) esetére a Verlinde sejtést 1991-ben (az egyik esetre A. Bertram-mal) igazolta. A probléma fontosságát mutatja, hogy 1992-ben Fields Medal nyertes matematikusok is publikáltak bizonyításokat (Donaldson, Witten, illetve S1(n)-re Faltings).

Jelentés az 1992. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítéléséről

I. díj:

Bíró András, ELTE TTK matematikus szak, III. évfolyam

Domokos Mátyás, ELTE TTK matematikus szak, V. évfolyam

II. díj:

Bóna Miklós, ELTE TTK matematikus szak, V. évfolyam
Hajdu Lajos, KLTE matematikus szak, V. évfolyam
Sziklai Péter, ELTE TTK matematikus szak, V. évfolyam
Vu Ha Van, ELTE TTK matematikus szak, III. évfolyam.

Indoklás

Bíró András Turán Pál 1942-ből származó, hatványösszegek becslésére vonatkozó problémájával foglalkozik. A sejtéssel olyan nagy matematikusok foglalkoztak, mint Erdős Pál, de Bruijn, Cassels, míg Atkinson bonyolult analitikus úton igazolta. Bíró András teljesen elemi bizonyítást ad, és egyben az eredményt numerikusan lényegesen javítja, elérhető közelségbe hozva a pontos becslést is. Bíró András eredményéért az ELTE TTK 1991-es Kari TDK konferenciáján kiemelt első díjat kapott. A Schweitzer versenyen 1989-ben dícséretet, 1990-ben harmadik, 1991-ben első díjat kapott.

Domokos Mátyás involúciógyűrűkkel kapcsolatban ért el eredményeket. Ezekre kiterjesztette Goldie klasszikus tételeit (amelyből a Noether-gyűrűk modern elmélete kifejlődött). Domokos Mátyás biideálok alkalmazása segítségével megtalálta a Goldie-féle feltételek szimmetrikus, involutorikus változatát, és ennek alapján jellemzi azokat az involúciógyűrűket, amelyeknek van kétoldali, klasszikus hányadosgyűrűjük, és az féligegyszerű (illetve egyszerű) Artin gyűrű. Azt is megmutatja, hogy az involúció egyértelműen terjeszthető ki a klasszikus hányadosgyűrűre. A kifejlesztett módszerinvolúció nélküli gyűrűkre is alkalmazható. Domokos Mátyás eredményéért az ELTE TTK 1991-es Kari TDK konferenciáján első díjat kapott. A Schweitzer versenyen 1991-ben dicséretet kapott.

Bóna Miklós kommutatív algebrai módszereket alkalmaz laitn kockák leszámolására, és azt igazolja, hogy — szemben a kétdimenziós esettel — ezek száma nem polinomja a kocka méretének. Eredményéért az ELTE TTK 1991-es Kari TDK konferenciáján harmadik díjat kapott.

Hajdu Lajos egy cikke közlésre van elfogadva „Some applications of the effecttive Dirichlet unit theorem" címmel a Publicationnes Math-ban. A cikkben a Dirichlet-féle egységtétel S-egységekre való általánosítása egy effektív változatát egészíti ki olyan új eredményekkel, melyek a tétel alakalmazhatóságát nagy mértékben megnövelik. A cikk még nem jelent meg, de eredményeit máris használják és idézik.

Sziklai Péter véges projektív síkokat vizsgált. Gleaason tétele szerint ha egy véges sík minden négyszög a 7 pontú Fano-síkot generálja, akkor a sík testre épített. Nyitott kérdés, hogy igaz-e ez z állítás általában, a két elemű helyett prím elemű testekre. Sziklai Péter egyrészt a koordináta-struktúra (a ternér gyűrű) vizsgálatára összpontosít, másrészt a projektív síkhoz rendelt ortogonális Latin-rendszert vizsgálja. A kifejlesztett apparátus reményt nyújt a fenti probléma belátására abban az esetben, amikor a vizsgált sík rendje prím-négyzet. Sziklai Péter eredményéért az ELTE TTK 1991-es Kari TDK konferenciáján első díjat kapott.

Vu Ha Van az extremális halmazrendszerek témakörében ért el eredményeket. Becsléseket ad metsző és erősen félmetsző (SF) rendszerek elemszámára, másrészt ügyes konstrukciókat SF-rendszerekre. Megvizsgálja az SF-rendszerek kapcsolatát a teljes gráfok teljes páros gráfokkal való fedésének problémájával. Vu Ha Van eredményéért az ELTE TTK 1991-es Kari TDK konferenciáján első díjat kapott. A Schweitzer versenyen 1991-ben dicséretet kapott.

Jelentés a Szele Tibor Emlékérem 1993. évi odaítéléséről

1993-ban a bizottság döntése alapján *Babai László* kapja a Szele Tibor Emlékérmet.

Indoklás: 1950-ben született Budapesten. 1973-ban szerzett kitüntetéses oklevelet az ELTE TTK matematikus szakán. Azóta az ELTE Algebra és Számelmélet tanszékének oktatója, 1987 óta egyetemi tanár beosztásban. Egyidejűleg a Chigaco-i Egyetem Számítógéptudományi tanszékének állandó professzora, szintén 1987-től kezdődően. Munkásságának középpontjában az algoritmusok bonyolultságának elmélete áll. Korábban jelentős eredményeket ért el a gráfelméletben és a csoportelméletben is. Eddig 121 tudományos dolgozata jelent meg, sok nemzetközi konferencián volt meghívott előadó, tavaly a párizsi európai matematikai kongresszuson tartott nagysikerű plenáris előadást, dolgozataira több mint 300 külföldi tudományos közlemény hivatkozik.

Állandóan tanítványok sokasága veszi körül, akiket kifogyhatatlan energiával segít munkájukban, problémák felvetésével, a próbálkozások türelmes meghallgatásával, döntő ötletekkel, a dolgozatok fogalmazványainak javítgatásával, és gyakorlati útmutatásokkal — legyen szó diákköri vagy szakdolgozatot író egyetemi hallgatóról, doktori vagy kandidátusi értekezésén dolgozó aspiránsról, vagy akár már fokozatot elért kollégáról. Formális tanítványai közül ketten szereztek kandidátusi, hatan egyetemi doktori fokozatot, de informális tanítványai között is több minősített kutatót találhatunk.

Tudományos munkássága: Diákkorában kezdett gráfok automorfizmuscsoportjaival foglalkozni. Ebből a témából írta kandidátusi disszertációját. Turán Pál egy kérdésére válaszolva meghatározta a síkgráfok lehetséges automorfizmuscsoportjait.

Ezek után figyelme az algoritmusok elmélete felé fordult. Elsőként adott meg olyan algoritmusokat, melyek gráfok széles osztályaira azok izomorfizmusát polinomiális időben eldöntik. Az izomorfizmus-algoritmusok területén mély csoportelméleti eszközöket alkalmazott (többek között az ún. részcsoporttorony módszert), amelyek az utóbbi években elért jelentős fejlődés alapjául szolgáltak.

Az izomorfizmusproblémával kapcsolatos vizsgálatai vezettek ahhoz a kérdéshez, hogy mekkora felső korlát adható egy n elemű halmazprimitív permutációcsoportjainak a rendjére. Erre a kérdésre a párizsi Akadémia 1860-ban díjat tűzött ki, számottevő eredmények azonban csak száz évvel később kezdtek születni. Az egyszerű csoportok klasszifikációját nem használó becslések közül Babaié volt az első, amely a tényleges nagyságrend közelébe jutott. Bizonyítása algebrai, kombinatorikai és valószínűségi módszerek impozáns ötvözete.

Az első mélyebb, nem relativizálható komplexitáselméleti eredmény is az interaktív bizonyításokhoz kapcsolódik, pontosan meghatározva, hogy mikor adható ilyen bizonyítás. Ez a dolgozat indította el az áttetsző bizonyítások vizsgálatát, amelyek érdekes eredményekre vezettek, többek között ahhoz, hogy sok problémánál már egy közelítő megoldás meghatározása is ugyanolyan nehéz, mint az eredeti feladat.

Jelentés az 1993. évi Beke Manó Emlékdíj odaítéléséről

Az 1993. évi Beke Manó Emlékdíj bizottság tagjai:

Surányi János (elnök), Laczkovich Miklós (titkár), Ács Katalin, Békefi Zsuzsa, C. Neményi Eszter, Pálmay Lóránt, Reményi Gusztávné, Scharnitzky Viktor voltak. A bizottság három alkalommal (1993. április 5-én, május 27-én és június 18-án) teljes részvétellel megtartott összejövetelén a díjak odaítélésére az alábbi döntést hozta:

1993-ban Beke Manó Emlékdíj *első fokozatában* részesíti

dr. Pintér Lajost, a szegedi József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézete docensét,

a Beke Manó Emlékdíj *második fokozatában* részesülnek

Hasmann Károlyné, a Fővárosi Pedagógiai Intézet Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskolájának vezető tanítója,

Károlyi Károly, a bátaszéki Általános Iskola tanára,

dr. Pintér Ferenc, a nagykanizsai Batthyány Gimnázium tanára,

Szabó Katalin, a csongrádi Batsányi János Gimnázium tanára,

Szeghő Lászlóné, a bajai II. Rákóczi Ferenc Általános Iskola nyugdíjas tanára.

Indoklás

dr. Pintér Lajos 1952-ben szerezte tanári diplomáját a szegedi Tudományegyetemen. Három esztendőn át tanított Makón a József Attila Gimnáziumban, majd a József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézetébe került. Ma is ott oktat egyetemi docensi beosztásban.

Egész munkásságával a matematikaoktatás színvonalának emelésére és a matematikai műveltség terjesztésére törekszik. Előadásaiban és gyakorlataiban a matematika és a tanári pálya iránti szeretetre oktatja diákjait. Hallgatóival a hivatali kötelességen túlmenően is sokat foglalkozik, és segíti a tudományos diákköri munkába való bekapcsolódásukat.

Rendszeresen tart előadásokat a középiskolai tanárok továbbképzésein és a vándorgyűléseken. Számos pedagógiai tanulmánya jelent meg. Munkásságának jelentős részét képezik gimnáziumi tankönyvei, a speciális matematika tagozat számára írt analízis könyvei, szakköri füzete és tanári kézikönyve.

Immár 30 éve vesz részt a Csongrád megyei diákok számára szervezett központi szakkör vezetésében. Az olimpiai előkészítő szakkör vezetésében annak megindulása óta közreműködik. Egyik szervezője a Szőkefalvi-Nagy Gyula Emlékversenynek is.

Külön meg kell említenünk azt a törekvését, amellyel elérte, hogy a „Matematika tanítása" című folyóirat időleges megszűnte után létrejöhetett egy hasonló tematikájú folyóirat. A „Polygon" megindításának lelkes kezdeményezője volt, és ma is e folyóirat felelős szerkesztője.

Munkájának elismeréséül 1967-ben elnyerte a Beke Manó Emlékdíj II. fokozatát, 1991-ben pedig „Kiváló tanár" kitüntetésben részesült.

Hasmann Károlyné 1955-ben szerezte meg tanítói oklevelét. Pályakezdőként Pest megye két községében tanított, majd Budapestre került. 1972-ben — szakmai munkájának elismeréséül — a Fővárosi Pedagógiai Intézet Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskolájába hívták, ahol a mai napig vezető tanítói feladatokat lát el. Munkáját nagy hivatásszeretettel és szakmai hozzáértéssel végzi. Gazdag módszertani ötleteit több, mint 20 éve adja át a főváros tanítóinak.

Tanítói munkája során különleges figyelmet fordít a matematika tanítására. Több matematikai program kipróbálásában vett részt, és elsők között vette át, majd terjesztette az „új" matematika tanításának módszerét. Munkájával sokat segítette a fővárosi tanítók matematikai szemléletének formálását. A TIT iskolai szakköreinek elindításától kezdve tart szakköri foglalkozásokat matematikából. Rendszeresen tájékoztatja a szülőket a kisgyermekekkel való otthoni foglalkozás módszereiről.

Különleges elismerést vívott ki kollégái körében azzal, hogy szakköri foglalkozásain nemcsak a tehetséges gyermekekkel foglalkozik, hanem a gyengébb, de a matematika iránt érdeklődő kisiskolások képességfejlesztésében is igen jó eredményeket ért el. Tanítványai az iskolai matematikai versenyeken kimagasló teljesítményt mutatnak, és a felső tagozatban a matematika tagozaton is jól megállják helyüket.

Publikál a „Tanító" című módszertani folyóiratban, és társszerzője több matematikai szakmai kiadványnak (feladatlapok, felmérések, versenyfeladatok gyűjteményei, KMBK (Kis Matematikusok Baráti Köre) füzetek. Az 1992-ben megjelent, társszerzőkkel írt 3. és 4. osztályos KMBK füzetei a szakkörökben és a tehetséges tanulókkal való differenciált foglalkozásokon igen sikeresek.

1991-től mint szakvezető tanító segíti a főiskolai hallgatók felkészítését. A fővárosban szervezett matematika továbbképzések állandó hallgatója, fogékony minden újra, amellyel a gyermekek fejlődését segítheti. Évek óta tart bemutató órákat a felső tagozatos matematika tanárok továbbképzésein. A tanárok nagy elismeréssel szólnak óráiról és az órákat követő tartalmas megbeszélésekről.

Magas szintű, felelősségteljes, kitartó munkájával a mai napig részese a korszerű matematikai gondolkodás elterjesztésének az általános iskola alsó tagozatán.

Károlyi Károly 1966-ban szerezte matematika-fizika szakos tanári diplomáját a Pécsi Tanárképző Főiskolán. Azóta Bátaszéken tanít. Tanítványait lelkes munkával készíti fel a matematika versenyekre és a középiskolában való helytállásra. Több évtizede végez eredményes munkát a felzárkóztatásban és tehetséggondozásban egyaránt.

Számos matematikai szakkör, verseny és tábor szervezője, illetve szakértője. Ilyen az egyéni pályázóknak szervezett csillebérci matematikai tábor, a Varga Tamás és a Kalmár László verseny, valamint a Tolna megyei levelező matematika verseny, amely jóval túlnőtt már a megye határain, és amelynek a döntőjére még az országhatáron túlról is jönnek jelentkezők. 1970 óta szervezi a TIT KMBK szakköreit.

Hosszú éveken át szervezte és vezette a megyei tanár-klubot, ahol tanártársai számára előadásokat és feladatmegoldó szemináriumokat tartott. Jelenleg megyei szakértőként is dolgozik, fáradhatatlanul utazik, és szerzi be a kollégái számára az új anyagokat és kiadványokat. Módszertani, szakmai felkészültsége, szervezőkészsége és lelkesedése az egész megye matematikatanítására nagy hatással van.

Munkájának elismeréséül 1984-ben Kiváló Munkáért kitüntetésben részesült.

dr. Pintér Ferenc 1972-ben szerezte meg matematika-fizika szakos tanári diplomáját a szegedi József Attila Tudományegyetemen. Azóta Nagykanizsán, a Batthyány Gimnáziumban tanít.

Már kezdő tanárként kitűnt magas szakmai felkészültségével. Folyamatosan képezi magát; az ELTE egy éves intenzív tanfolyamának elvégzése után 1982-ben egyetemi doktori fokozatot szerzett analízis témából. A tehetséggondozást mindig fő feladatának tekintette. Rendszeresen vezet iskolai és központi szakköröket. Többek között ő irányítja a Somogy és Zala megyei olimpiai csúcsszakköröket is. Rendszeresen résztvevője és irányítója volt a zalai nyári matematikai táboroknak. Tehetséggondozó munkájának eredményeként több tanulója volt már helyezett matematikából a különböző országos matematikai versenyeken. Tevékenyen részt vett a Bolyai Társulat középiskolai oktatási kísérletének kipróbálásában.

1975-ben egyik alapítója a Bolyai János matematikai Társulat Zala megyei tagozatának, és ennek megalakulása óta ő tölti be a megyei titkári tisztet. Szervező munkája eredményeként az utóbbi 5 évben két vándorgyűlést rendezett a megye. Ugyancsak ő volt az elindítója és egyik szervezője a Batthyány Gimnázium két évente megrendezett matematikai konferenciáinak.

Jelenleg a megyei matematika szaktanácsadói tisztet is betölti. E minőségében indította el 1992-ben a megyei matematika módszertani előadássorozatot általános- és középiskolai tanárok számára.

Szabó Katalin 1965-ben szerezte matematika-fizika szakos tanári diplomáját a szegedi József Attila Tudományegyetemen. Azóta Csongrádon, a Batsányi János Gimnáziumban tanít.

A tanítványaival való foglalkozást az alkotó légkör, a munkatársi kapcsolat jellemzi. Szívesen hangoztatja: „nekem a tanítványaim a munkatársaim".

Állandóan képezi magát, igen sok továbbképző tanfolyamon vett részt. A matematika tanárok intenzív továbbképző tanfolyamát is kiváló minősítéssel végezte el. Néhány éve a matematika mellett nagy lelkesedéssel foglalkozik számítástechnikával is, és megszerezte a számítástechnika tanári oklevelet.

Munkássága kezdetétől igen intenzíven és kiemelkedő eredménnyel foglalkozik a tehetséges diákokkal. Tanítványai rendszeresen és rendkívül eredményesen vesznek részt a különböző matematikai versenyeken: a Szőkefalvi-Nagy Gyula emlékversenyen, amelynek rendszeres szervezője is, az Arany Dániel versenyen, az OKTV-n és a KÖMAL feladatmegoldó versenyén több tucat tanítványa ért el helyezést vagy kapott dícséretet. Tanítványai közül sokan választották élethivatásul a matematikával való foglalkozást, és többen közülük ígéretes matematikusi pályára léptek.

Szeghő Lászlóné 1948-ban végezte el a Bajai Tanítóképző Főiskolát. Tanyasi iskolákban kezdett tanítani, majd 1953-ban levelező tagozaton szerzett matematika-fizika tanári diplomát a Szegedi Pedagógiai Főiskolán. Ezután falusi iskolákban tanított. Kollégái kérésére Nagybaracskán igazgató lett, de ezt a megbízást csak rövid időre vállalta, hogy minden energiáját a tanításnak szentelhesse. Néhány év után Bajára került, ahol nyugdíjazásáig a II. Rákóczi Ferenc Általános Iskolában tanított.

Rendszeresen és intenzíven képezte magát. A számítástechnika tanfolyamok elvégzése után elsőként kezdeményezett általános iskolás korú gyermekek számára számítástechnika oktatást. Számos tanítványa ért el helyezést a Bács-Kiskun megyei számítástechnika versenyeken.

Mindig hatalmas munkát fektetett tanítványai felzárkóztatásába. Fáradhatatlanul, sok-sok szeretettel és empátiával szerkesztette a gyerekeknek az egyénre szabott fejlesztő feladatsorokat. A környező iskolák mindig boldogan fogadták a tanítványait. A Törd a fejed rádiós vetélkedőn, a Varga Tamás és Kalmár László versenyeken, a televízió matematikai vetélkedőin, a megyei versenyeken a tanítványai rendszeresen az élvonalban szerepeltek.

Volt iskolai-, járási és városi munkaközösségvezető. Számos továbbképzésen adta át kollégáinak a tapasztalatait. Munkájának elismeréséül 1968-ban megkapta az Oktatásügy Kiváló dolgozója, 1978-ban pedig a Kiváló Pedagógus kitüntetést. 1985-ben Budai Dezső díjban részesült, 1986-ban pedig elnyerte a Szolgálati Érdemérmet.

Jelentés az 1993. évi Farkas Gyula Emlékdíj odaítéléséről

A Farkas Gyula Emlékdíj bizottság az 1993. évi díjat

Kiss Béla (Széchenyi I. Távközlési Műszaki Főiskola, Győr)
részére ítéli oda.

Kiss Béla 1961-ben született. Már hallgatóként eredményes diákköri munkát végzett. Később a parciális differenciálegyenletek párhuzamos numerikus módszereiben centrális jelentőségű tartomány dekompozíciós módszerekkel foglalkozott és ért el fontos eredményeket. Így a korábbi elméleti eredményeket felhasználva és továbbfejlesztve néhány speciális mátrix elemeinek explicit kiszámításával lehetőség nyílik arra, hogy a tartomány dekompozíciós módszereket széles körben is könnyen felhasználhatóvá tegyük.

Az eddig elért eredményeket 4 dolgozatban foglalta össze, melyből 3 már megjelent.

Jelentés az 1993. évi Rényi Kató Emlékdíj odaítéléséről

I. díj:

Benczúr András, ELTE TTK V. éves hallgató

Keleti Tamás, ELTE TTK V. éves hallgató

Vályi Sándor, KLTE V. éves hallgató.

Indoklás

Benczúr András a kombinatorikus optimalizálás terén ért el eredményeket, 5 angol nyelvű dolgozata van megjelenés alatt. Elsősorban a közel minimális élvágások szerkezetével kapcsolatos vizsgálatai fontosak.

Keleti Tamás az úgynevezett „hegymászási problémá"-val kapcsolatban ért el egy fontos, mélyenfekvő eredményt, amely a Proceedings of the AAMS-ben jelent meg, és máris felkeltette neves amerikai matematikusok érdeklődését is.

Vályi Sándor kutatási témaköre a logikán belül az önreferens nyelvek formális igazságdefiniciója környékén helyezhető el. A halmazelmélet nem sztenderd modelljei témakör területén dolgozik aktívan, komoly eredményeket ért el ezen a területen.

Beszámoló a 34. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

A 34. Nemzetközi Diákolimpiát 1993. július 13–24. között Törökország rendezte meg, Isztambulban. A versenyen 73 ország csapata vett részt (a csapatok létszáma általában 6 fő volt, az ettől eltérő létszámot az ország neve után zárójelben jelezzük):

Albánia, Algéria(5), Amerikai Egyesült Államok, Argentína, Ausztrália, Ausztria, Azerbajdzsán(5), Bahrein, Belgium, Belorusszia(4), Bosznia-Hercegovina(2), Brazília, Bulgária, Észak-Ciprus, Csehország, Dánia, Dél-Afrika, Észtország, Finnország, Franciaország, Fülöp-szigetek, Grúzia, Hollandia, Hongkong, Horvátország, India, Indonézia, Irán, Írország, Izland (4), Izrael, Japán, Kanada, Kazahsztán, Kína, Kirgízia (5), Kolumbia, Dél-Korea, Kuba, Kuvait, Lengyelország, Lettország, Litvánia, Luxemburg(1), Macedónia(4), Magyarország, Makaó, Marokkó, Mexikó, Moldávia, Mongólia, Nagy-Britannia, Németország, Norvégia(5), Olaszország, Oroszország, Örményország, Portugália, Románia, Spanyolország, Svájc(4), Svédország, Szingapúr, Szlovákia, Szlovénia(5), Tajvan, Thaiföld, Törökország, Trinidad és Tobago, Türkmenisztán(3), Ukrajna, új-Zéland, Vietnam.

A versenyen tehát eredetileg 413 versenyző indult, később azonban a zsűri Türkmenisztán egy versenyzőjét meg nem engedett segédeszköz használata miatt kizárta a versenyből.

Az olimpián két egymás utáni napon 4 1/2–4 1/2 óra alatt 3–3 feladatot kellett megoldani. Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7–7 pont járt, egy versenyző tehát maximum 42 pontot szerezhetett. A verseny feladatai elég nehéznek bizonyultak, így az egyes díjak alsó ponthatárai a szokásosnál alacsonyabbak voltak. Első díjat 30–42 ponttal, második díjat 20–29 ponttal, harmadik díjat pedig 11–19 ponttal lehetett szerezni. A magyar csapat mind a hat tagja díjazott helyen végzett:

Első díjat nyert:

Csörnyei Marianna (Bp., Fazekas Mihály Gimn., III.o.t.) 33 pont

Futó Gábor (Bp., Fazekas Mihály Gimn., III.o.t.) 32 pont és

Faragó Gergely (Bp., Fazekas Mihály Gimn., IV.o.t.) 32 ponttal.

Második díjat nyert:

Szeidl Ádám (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., III.o.t.) 22 ponttal.

Harmadik díjat nyert:

Németh Ákos (Bp., Fazekas Mihály Gimn., III.o.t.) 12 pont és

Marx Gábor (Bp., Szent István Gimn., IV.o.t.) 12 ponttal.

Ha az egyes országok teljesítményét az összpontszám alapján hasonlítjuk össze, a magyar csapat az erős mezőnyben igen jónak számító 8. helyen végzett. Ezen számítás szerint az első tíz helyezett ország: 1. Kína 215, 2. Németország 189, 3. Bulgária 178, 4. Oroszország 177, 5. Tajvan 162, 6. Irán 153, 7. Amerikai Egyesült Államok 151, 8. Magyarország 143, 9. Vietnam 138, 10. Csehország 132.

Még jobb a magyar csapat eredménye, ha a (sport-) olimpiákon szokásos, éremtáblázat szerinti rangsort nézzük. Ebben a rangsorban Magyarország a 73 résztvevő ország közül a 4. helyen végzett (zárójelben az egyes országok után a szerzett arany-, ezüst- és bronzérmek száma):

1. Kína (6,0,0); 2. Németország (4,2,0); 3. Oroszország (4,1,1); 4. Magyarország (3,1,2); 5. Bulgária (2,4,0); 6. Irán (2,3,1); 7. Amerikai Egyesült Államok (2,2,2); 8 Franciaország (2,1,1); 9. Tajvan (1,4,1); 10. Vietnam (1,4,1).

A verseny szervezése és lebonyolítása mintaszerű volt. A versenyzők és a vezetők szállása és ellátása is kitűnő volt, a feszített időrend által szabadon hagyott időben pedig a rendezők változatos programról gondoskodtak (isztambuli városnézés, hajókirándulás a Boszporuszon, stb.).

A magyar csapat vezetője Pelikán József, helyettes vezetője Pataki János volt. A csapat felkészítéséért elsősorban Reiman Istvánt illeti köszönet.

Az 1994. évi diákolimpia július 8–20. között Hongkongban kerül megrendezésre.

(A beszámolót Pelikán József készítette.)

Beszámoló a Kombinatorika konferenciáról (Keszthely, 1993. július 19–23.)

A konferenciát Erdős Pál 80. születésnapja tiszteletére rendeztük. Ebben az évben számos ilyen célú konferencia volt, ezek közül ez volt a legnagyobb létszámú: 267 résztvevővel, akik közül 76 volt magyar. A résztvevők 24 országból érkeztek. A konferencián 36 hosszabb meghívott és 158, 15 perces szekció előadás hangzott el.

A konferencia tudományos színvonala kiemelkedően magas volt. A speciális alkalom Erdős Pál igen sok és kiváló társszerzőjét, barátját vonzotta ide. A világ összes jelentős kombinatorika központja képviseltette magát. Feltétlenül említésre méltó, hogy 39, 14, ill. 9 résztvevő érkezett olyan távoli országokból, mint az USA, Kanada, ill. Izrael.

A meghívott előadásokat tartók névsora is igen kiváló volt: M. Ajtai, N. Alon, J. Beck, A. Blokhuis, F.R.K. Chung, W. Deuber, R. Faudree, Z. Füredi, H. Fürstenberg, R.L. Graham, C.D. Godsil, R. Guy, R. Häggkvist, A.A. Ivanov, M. Karonski, A. Kostochka, T. Luczak, W. Mader, E.C. Milner, J. Nešetril, V. Rödl, H. Sachs, M. Saks, N. Sauer, A. Schrijver, J. Schönheim, S. Shelah, J. Spencer, G. Szekeres, C. Thomasen, W.T. Trotter, A. Wigderson, P. Winkler.

A nagy érdeklődésre való tekintettel a szervezők kénytelenek voltak korlátozni számos jónevű matematikus előadásának hosszát. Az előadások felölelték a kombinatorika legtöbb területét és számos a kombinatorikával kapcsolatban levő számítógéptudományi területet is.

Érdekes mozzanata volt a konferenciának, amikor A. Kostochka ismertette egy bonyolult nyitott kérdés megoldását, és Erdős Pál az előadás után átnyújtotta az általa ennek a problémának a megoldására felajánlott 100 USD összeget.

Sajnálatos jelenség volt viszont, hogy aránylag kevesen tudtak a volt Szovjetunióból (3 fő), és a volt szocialista országokból (39 fő) résztvenni a konferencián.

Említésre méltó, igen pozitív mozzanata a konferenciának, hogy — hála a szervező bizottság néhány tagja igen nagy munkájának — a konferenciára megjelent (a BJMT első önálló kiadványaként) egy, a meghívott előadók egy részének előadását tartalmazó kötet. A további meghívott előadásokat jövő tavasszal kívánjuk megjelentetni.

Számelmélet konferencia (Lillafüred, 1993. június 21–26.)

A konferencián 7 egyórás és 38 félórás kitűnő előadást hallgathatott a 69 résztvevő. Érdekességként megjegyzendő, hogy a rendezvénnyel egyidőben jelentette be Andrew Wiles a Fermat sejtés bizonyítását Cambridge-ben. Ehhez mérhető világot rengető eredményekről nálunk nem számoltak be, de kiemelendő Beck József, Carl Pomerance, Wolfgang Schmidt, Adolf Hildebrand és Jerzy Kaczorowski érdekes és érthető előadásait.

Elég nagy érdeklődés mutatkozott a konferencia iránt, mégis alig volt ismeretlen a résztvevők között.

Jelen volt viszont számos neves kutató, mint meghívott előadó: Erdős Pál, Alte Selberg, Peter Elliott, Andrzej Schinzel, Wolfgang Schmidt, Grigori Freiman és még sokan mások. (Az időpont egy kicsit korainak bizonyult, valamint sajnálatos módon a második körlevél nem jutott el minden címzetthez.)

A Palota Szálló megfelelő helyszínnek bizonyult.

Mivel Magyarország drágává, szemtelenül drágává vált, főleg a volt szocialista országok résztvevői számára próbáltunk anyagi támogatást szerezni. Ez nem igazán sikerült; itthonról főleg „magán" szponzorok segítettek: Halász Gábor, Kátai Imre, Ruzsa Imre, ill. az MTA (30 ezer forinttal). Megpályáztunk az EK-tól 10 ezer ECU támogatást „keleti" vendégeink számára. Erre olyan sokáig nem érkezett válasz, hogy a körlevelekben semmit nem lehetett ígérni. Végül egy héttel a konferencia előtt telefonon kaptunk pozitív választ kérelmünkre, pénz azonban a mai napig nem érkezett! A vélt pénzt minden résztvevő egyenlő mértékű támogatására fordítottuk.

Csillag Pál találkozó (Balatonlelle, 1993. május 28–31.)

A négynapos rendezvényen a résztvevők száma elérte az 50 főt (ehhez jöttek még családtagok). A szakmai programokat igen nagy érdeklődés kísérte. Szombaton Móri Tamás (ELTE) meghívott előadó előadása után Viharos László (JATE) foglalta össze statisztikai eredményeit. Vasárnap Kolumbán József (Babes–Bolyai Egyetem, Kolozsvár) és Csákány Rita (Rutgers Egyetem) meghívott előadók előadásai után Ispány Márton (KLTE) ismertette funkcionálanalízis témakörébe tartozó módszereit.

A hazai résztvevők mellett három olasz TEMPUS hallgató és két zágrábi biztosítási matematikával foglalkozó fiatal matematikus is résztvett.

A rendezvényen számosan jeleztek kéréseket (legyen újra ötnapos a találkozó, egy-egy helyre több tájékoztatót küldjünk, stb.), illetve segítséget ajánlottak fel részfeladatok (körlevelek terítése, meghívott előadók szervezése, stb.) elvégzésében. Sajnos, a teljes találkozó megszervezését még senki sem vállalta el.

(A beszámolót Illés Tibor készítette.)

Rátz László vándorgyűlés (Szolnok, 1993. július 6–9., több, mint 500 fő)

A július 6-i megnyitón a Beke Manó Emlékdíjakat Hajnal András és Katona Gyula adták át.

A plenáris ülésen „Kedvenc problémáim" címmel előadást tartott Erdős Pál, akit 80. születésnapja alkalmából szeretettel és tisztelettel köszöntött a vándorgyűlés minden résztvevője. Laczkovich Miklós „Alakzatok felbontása egybevágó háromszögekre" c. előadása is méltán aratott nagy sikert. A gazdag programból történő választásokat jól segítette az előre kiküldött anyagban a 20 előadásvázlatot tartalmazó összeállítás.

Július 7–8–9-én szekcióüléseken folytatta a vándorgyűlés a munkát. Minden szekcióban kiemelt szerepet kapott a geometria oktatásának néhány kérdése — különös tekintettel a térszemlélet fejlesztésének folytonosságára. (Alsó tagozat — Pálmay Lóránt, felső tagozat — Vásárhelyi Éva, Holló-Szabó Ferenc, középiskolák — Kántor Sándorné.) Több szeminárium is foglalkozott ezzel a témával.

A plenáris ülésen elhangzott — idő hiányában viszont nem kellően körüljárt — téma : a Milyen legyen egy jó tankönyv? a szekció üléseken konkrét könyvek vagy készülő könyvek szemléletének bemutatásával folytatódott (pl. C. Neményi Eszter, Szilágyiné Oravecz Márta, Fábos Lászlóné, Holló-Szabó Ferenc, Szeredi Éva), ezzel is igyekezve szakmai oldalról segíteni az u.n. tankönyvválasztást.

Kiemelkedő volt a Felsőoktatási Ankét és a középiskolai szekció néhány közös előadása (Petruska György, Elekes György, Pintér Klára).

A tavalyi vándorgyűlés két fontos témáját (a versenyek és az iskolai szerkezetváltás) folytattuk az idén is.

Szemináriumok foglalkoztak újból a társulati versenyekkel (Pogáts Ferenc és Bartha Gábor). Jól informált és kellően sorakoztatta fel az érveket, ellenérveket a szerkezetváltásos ankét mindhárom előadója. Tóth Tiborné és Somfai Zsuzsa a hatosztályos, Brenyó Mihály a nyolcosztályos gimnáziumot mutatta be.

Az Informatikai Bizottság által rendezett bemutatóknak, szemináriumoknak nagy sikere volt. Örömmel láthattuk, hogy a számítógép „elhagyta" a szokásos kereteket, kilépett az alkalmazások szintjére is. Különösen sokat tanulhattak a résztvevők Hubert Tibor és Zombory József bemutatóiból.

Különleges élményt jelentett Szikla László iparművész „a tér — szemmel és kézzel" c. bemutatója és Kovács Zoltán „Játszóház"-ának minden érdekes részlete.

A vándorgyűlés rendezvényeihez szervesen kapcsolódott a KÖMAL 100 éve c. kiállítás (rendezte Kántor Sándorné) és a Fejér Lipót és Riesz Frigyes életéről és munkásságáról készült video bemutatása. (A video elkészültében nagy szerepe volt Ács Katalinnak.)

A vándorgyűlés szoros részeként július 9–10-én a MAT-KAPOCS tartotta összejövetelét. A közel 100 résztvevő a MAT-KAPOCS alapszabály-szervezet megvitatásával, majd az alapszabály véglegesítésével, a vezetőség megválasztásával is foglalkozott. Elnök Vancsó Ödön, titkár Vásárhelyi Éva lett.

A vándorgyűlés szakmai programját szolnoki városnézés, a „Tisza" táncegyüttes nagysikerű bemutatója és három útvonalon Szolnok megyére szervezett kirándulások egészítették ki.

A vándorgyűlés befejezésekor az Oktatási Bizottság Szolnokon ülést tartott.

A vándorgyűlés résztvevői önkéntes felajánlásokkal, az u.n. „$+n$ Ft" befizetésével segítették a környező országokban élő magyar matematika tanárok részvételét vándorgyűlésünkön. Az idén 38 fő részvételét biztosították ezek a befizetések, ill. a Kemény Zsigmond Alapítvány.

(A beszámolót Békefi Zsuzsa készítette.)

JELENTÉS AZ 1993. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1993. október 29. és november 8. között rendezte meg az 1993. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi vagy főiskolai hallgatók, valamint 1993-ban egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A verseny megrendezésére a Bolyai János Matematikai Társulat a következő bizottságot jelölte ki: Győry Kálmán (elnök), Boros Zoltán és Pintér Ákos (titkárok), Arató Mátyás, Bácsó Sándor, Bódi Béla, Daróczy Zoltán, Dömösi Pál, Dragálin Albert, Fazekas István, Gaál István, Maksa Gyula, Pap Gyula, Pethő Attila, Száz Árpád, Szilasi József, Sztrik János, Tamássy Lajos, Turjányi Sándor, Szabó József. A bizottság munkájában Kozma László, Molnár Lajos és Páles Zsolt is részt vett.

A bizottság 10 feladatot tűzött ki. A feladatokat sorrendben Erdős Pál–Makai Endre, Ruzsa Imre, Pethő Attila, Csákány Béla, Komjáth Péter–Laczkovich Miklós, Totik Vilmos, Daróczy Zoltán–Maksa Gyula, Molnár Lajos, Szilasi József és Pap Gyula bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A versenyre 25 versenyző 118 megoldást nyújtott be, amiből 59 bizonyult teljesnek.

A beérkezett megoldások értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta:

I. díjban és 7500 Ft pénzjutalomban részesül *Bíró András,* az ELTE V. éves hallgatója.

II. díjban és 6500 Ft pénzjutalomban részesül *Drasny Gábor,* az ELTE 1993-ban végzett hallgatója.

III. díjat a bizottság nem ad ki.

1. dicséretben és 2000 Ft pénzjutalomban részesül *Prokaj Vilmos,* az ELTE 1993-ban végzett hallgatója, *Csörnyei Mariann,* a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Maróti Miklós,* a JATE III. éves hallgatója.

2. dicséretben és 1000 Ft pénzjutalomban részesül *Vu Ha Van,* az ELTE V. éves hallgatója, *Gács András,* az ELTE V. éves hallgatója.

Indoklás

Bíró András megoldotta az 1., 2., 3., 5., 6., 7., 8. és 10. feladatot. A 3., 5., 8. és 10. feladatra adott megoldása kiemelkedő.

Drasny Gábor megoldotta az 1., 2., 3., 4., 5., 6. és 7. feladatot. A 10. feladatra adott megoldása kissé hiányos. A 2., 4., 5., 6. és 7. feladatra adott megoldása kiemelkedő.

Prokaj Vilmos megoldotta a 2., 3., 4., 7. és 8. feladatot. Az 1. és a 10. feladat megoldása során részeredményeket ért el. A 7. és 8. feladatra adott megoldása kiemelkedő.

Csörnyei Mariann megoldotta az 1., 2., 3., 4. és 10. feladatot. A 2. feladatra adott megoldása kiemelkedő.

Maróti Miklós megoldotta az 1., 2., 3., 4. és 7. feladatot.

Vu Ha Van megoldotta az 1., 2., 7. és 10. feladatot. A 6. feladatra adott megoldása hiányos.

Gács András megoldotta a 2., 3., 4. és 7. feladatot. A 8. feladatra adott megoldása hiányos.

Az 1993. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Legyen adva n pont a síkban azzal a tulajdonsággal, hogy bármely kettő távolsága legalább 1. Bizonyítsuk be, hogy elég nagy n esetén azon pontpárok száma, amelyek távolsága valamilyen t_1, t_2-re a $[t_1, t_1+1] \cup [t_2, t_2+1]$ halmazban van, legfeljebb $\left[\frac{n^2}{3}\right]$, és ez pontos.

2. Legyen A a természetes számok egy részhalmaza és legyenek k, r pozitív egészek. Tegyük fel, hogy A-ból bármelyik r különböző elemet kiválasztva ezek legnagyobb közös osztója legfeljebb k különböző prímosztóval rendelkezik. Bizonyítsuk be, hogy A felbontható $A = B \cup C$ alakban, ahol B bármely elemének legfeljebb $k+1$ különböző prímosztója van és

$$\sum_{n \in C} \frac{1}{n} < \infty.$$

3. Jelölje K az $x^4 - 2x^2 - 1$ polinom valamely gyökének a racionális számtesthez való adjungálásával keletkező testet. Bizonyítandó, hogy K egészei gyűrűjében nincsenek kivételes egységek. (Az ε egységet kivételesnek nevezzük, ha $1 - \varepsilon$ is egység.)

4. Legyen f olyan háromváltozós művelet egy legalább négyelemű halmazon, amelyre teljesülnek

$$(1) \qquad f(x,x,y) \equiv f(x,y,x) \equiv f(x,y,y) \equiv x,$$

$$(2) \qquad f(x,y,z) = f(y,z,x) = f(y,x,z) \in \{x,y,z\}, \text{ ha } x \neq y \neq z \neq x.$$

Bizonyítsuk be, hogy f-nek van olyan nemtriviális g szuperpozíciója, hogy g-nek f nem szuperpozíciója. (A g művelet szuperpozíciója f-nek, ha g előállítható f-ből összetett függvény képzésének véges számú alkalmazásával. A g n-változós művelet triviális, ha $g(x_1,\ldots,x_n) \equiv x_i$ valamely i-re $(1 \leq i \leq n)$.)

5. Van-e a valós számok halmazának olyan $\prec$ jólrendezése, amelyre a sík $\{(x,y) : x \prec y\}$ részhalmazának minden egyenessel való metszete az egyenesen Lebesgue-mérhető?

6. Legyenek $P_1, P_2, \ldots$ tetszőleges pontok és A egy 4-nél nagyobb átmérőjű összefüggő kompakt halmaz a síkon. Mutassuk meg, hogy A valamely P pontjára a $\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2} \cdot \ldots \cdot \overline{PP_n}$ távolságszorzatok közül végtelen sok nagyobb 1-nél. Igazoljuk továbbá, hogy ez 4 átmérőjű kompakt halmazokra már nem feltétlenül igaz.

7. Legyen H Hilbert-tér a valós számok teste felett. Adjuk meg az összes olyan $f : H \to$ folytonos függvényt, amelyre

$$f(x+y+\pi z) + f\big(x+\sqrt{2}z\big) + f\big(y+\sqrt{2}z\big) + f(\pi z) =$$
$$= f\big(x+y+\sqrt{2}z\big) + f(x+\pi z) + f(y+\pi z) + f\big(\sqrt{2}z\big)$$

bármely $x, y, z \in H$ esetén teljesül.

8. Legyen H komplex szeparábilis Hilbert-tér és jelölje $\mathcal{B}(H)$ a korlátos lineáris operátorok algebráját H-n. Adjuk meg $\mathcal{B}(H)$ összes olyan $\mathcal{A}$ rész $*$-algebráját, melyre minden $A \in \mathcal{B}(H)$ és $T \in \mathcal{A}$ esetén létezik olyan $S \in \mathcal{A}$, hogy

$$TA - AT^* = TS - ST^*.$$

9. Legyen adva az ^{n} sokaság érintőnyalábjának egy $\pi : E \to$ ^{n} vektor-résznyalábja. (Ekkor egy $p \in$ ^{n} pont fölötti $E_p := \pi^{-1}(p)$ fibrum vektor-altere T_p ^{n}-nek.) Mutassuk meg, hogy ha bármely $A :$ $^n \to T$ ^{n} konstans vektormező és $X :$ $^n \to E$ metszet esetén $[A,X](p) \in E_p$ ($p \in$ ^{n}), akkor E fibrumai az ^{n} tér párhuzamos síkjai. (A differenciálgeometriában szokásos simasági feltételekkel élünk.)

10. Legyenek U_1, U_2 és U_3 független, $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók, melyeket nagyság szerint rendezve $U_1^* \leq U_2^* \leq U_3^*$ adódik. Legyenek

$\alpha, p_1, p_2, p_3 \in [0,1]$ olyanok, hogy $\mathbf{P}\{U_j^* \geq p_j\} = \alpha$ $(j = 1,2,3)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{P}\left\{p_1 + (p_2 - p_1)U_3^* + (p_3 - p_2)U_2^* + (1 - p_3)U_1^* \geq \frac{1}{2}\right\} \geq 1 - \alpha.$$

A megoldások ismertetése

Az 1. feladat megoldása

Először megmutatjuk, hogy minden n-re meg tudunk adni $p_1, \ldots, p_n$ pontokat a síkban, hogy $\overline{p_i p_j} \geq 1$, és azon $\{p_i, p_j\}$ párok száma, melyekre $\overline{p_i p_j} \in [t_1, t_1 + 1] \cup [t_2, t_2 + 1]$, pontosan $[n^2/3]$. Legyen $n = n_1 + n_2 + n_3$, $n_i \in \{[n/3], -[-n/3]\}$, és $\{p_1, \ldots, p_n\} = \{(ix, k_i) \mid i = 1,2,3,\ 1 \leq k_i \leq n_i \text{ egész}\}$, ahol x elég nagy. Ekkor a Pythagoras tétel szerint egy $\{(x, k_1), (2x, k_2)\}$ pontpár távolsága benne van $[x, x + (n/3)^2/(2x)]$-ben. Ugyanez igaz a $\{(2x, k_2), (3x, k_3)\}$ pontpárokra, míg $\{(x, k_1), (3x, k_3)\}$ távolsága benne van $[2x, 2x + (n/3)^2/(4x)]$-ben. A fenti pontpárok összszáma $[n^2/3]$, és $(n/3)^2 \leq 2x$-re a $t_1 = x$, $t_2 = 2x$ választással a fenti pontpárok távolságai $[t_1, t_1 + 1] \cup [t_2, t_2 + 1]$-ben vannak.

Most megmutatjuk, hogy elég nagy n esetén a szóbanforgó $\{p_i, p_j\}$ párok száma legfeljebb $[n^2/3]$. Nyilván feltehető $t_1, t_2 > 0$.

Először egy segédállítást bizonyítunk: ugyanazon feltevés mellett, elég nagy n-re azon $\{p_i, p_j\}$ párok száma, melyekre $\overline{p_i p_j} \in [t_2, t_2 + 1]$, legfeljebb $[n^2/4]$. Valóban, ha ez nem teljesülne, tekintsük azt a G_2 gráfot, amelynek csúcsai $p_1, \ldots, p_n$, és élei azon $\{p_i, p_j\}$ párok, amelyekre $\overline{p_i p_j} \in [t_2, t_2+1]$. A Turán gráftétel értelmében ekkor G_2-ben van háromszög, sőt a Turán gráftétel egy jólismert variánsa szerint van egy $K(1, 1, [\text{const} \cdot n])$ részgráfja is G_2-nek. (A $K(a_1, \ldots, a_m)$ gráf olyan gráf, amelynek csúcshalmaza diszjunkt uniója $A_1, \ldots, A_m$ halmazoknak, ahol $|A_i| = a_i$, és pontosan azok az élek szerepelnek benne, amelyeknek a két végpontja különböző A_i-khez tartozik. A feladatmegoldásban const pozitív konstansokat jelöl, amelyek a különböző helyeken lehetnek különböző értékek.) A fenti $K(1, 1, [\text{const} \cdot n])$ csúcshalmaza A_1, A_2, A_3 diszjunkt uniója, ahol pl. $A_1 = \{p_1\}$, $A_2 = \{p_2\}$, és $|A_3| = [\text{const} \cdot n]$.

Ekkor A_3-nak a p_k körüli t_2 belső és $t_2 + 1$ külső sugarú D_k körgyűrűben kell feküdnie, ahol $k = 1, 2$, tehát $A_3 \subset D_1 \cap D_2$. Viszont $t_2 \leq$ const esetén $D_1 \cap D_2$ része egy const sugarú körnek, míg $T_2 \geq$ const esetén (ahol a konstans elég nagy), $D_1 \cap D_2$ két ívnégyszögből áll. Állítjuk, hogy mindkét esetben $D_1 \cap D_2$ legfeljebb konstans sok p_i pontot tartalmazhat. Valóban, mivel ezek kölcsönös távolságai legalább 1 nagyságúak, az ezen pontok köré írt $1/2$ sugarú nyílt körök (diszjunkt) uniója benne van egy D halmazban, amely egy konstans sugarú kör ($t_2 \leq$ const esetén), ill. a p_1 és p_2 körüli $t_2 - 1/2$ és $t_2 + 3/2$ belső ill. külső sugarú körgyűrűk metszete ($t_2 \geq$ const esetén), amiből következően $|A_3|\pi/4$ legfeljebb a D halmaz területe. Az első esetben D területe korlátos. A második esetben D két összefüggő komponensből áll, és bármelyikük befoglalható egy benne levő $p_i \in A_3$ pont segítségével képzett $S_1 \cap S_2$ halmazba, ahol S_k $(k = 1, 2)$ egy olyan síksáv, amelynek határoló egyenesei p_k-tól $t_2 - 1$, $t_2 + 3/2$ távolságra vannak, és merőlegesen metszik a $p_k p_i$ félegyenest. (Ugyanis D összefüggő komponensei ívnégyszögek, amelyek közül a tekintettnek a csúcsai $S_1 \cap S_2$-ben vannak, így élei is, így az egész komponens is. Ha pedig valamelyik összefüggő komponensben nincs $p_i \in A_3$ pont, azt a komponenst nem kell vizsgálni.) Az $S_1 \cap S_2$ halmaz egy $5/2$ magasságú, kb. $60°$-os szögű rombusz. Így a második esetben is D területe korlátos. Tehát $[\text{const} \cdot n] = |A_3|$ és $|A_3|\pi/4 \leq$ const, ami ellentmondás, amivel a segédállításunkat beláttuk. (Nem tartozik a feladathoz, de megjegyezzük, hogy a segédállításbeli egyenlőtlenség is pontos. Egyenlőség éretik minden n-re, pl. a $\{(ix, k_i) \mid i = 1, 2,\ 1 \leq k_1 \leq [n/2],$

$1 \le k_2 \le -[-n/2]$, k_1, k_2 egész$\}$ pontrendszerre, ha $(n/2)^2 \le 2x$, és $t_2 = x$. Ennek bizonyítása a feladatbeli egyenlőtlenség pontosságának bizonyításával azonos módon történik.)

Ezután belátjuk magát a feladatban szereplő egyenlőtlenséget. Legyen $t_1 \le t_2$, és legyen n elég nagy.

Két esetet különböztetünk meg. Először legyen $t_1 \le \varepsilon_0 n$, ahol $\varepsilon_0 > 0$ alkalmas kis szám. Ekkor a fenti területes meggondolással analóg módon következik, hogy adott p_i esetén azon p_j-k száma, amelyekre $\overline{p_i p_j} \in [t_1, t_1+1]$, legfeljebb const$\cdot\varepsilon_0 n$. (Ugyanis a szóban forgó p_j-k köré írt 1/2 sugarú körök benne vannak egy $t_1 - 1/2$, $t_1 + 3/2$ belső, ill. külső sugarú körgyűrűben, amelynek területe legfeljebb const$\cdot\varepsilon_0 n$.) Ebből következik, hogy $\left|\{\{p_i, p_j\} \mid \overline{p_i p_j} \in [t_1, t_1+1]\}\right| \le \text{const}\cdot\varepsilon_0 n^2$. Ez előbb bizonyított segédállítás miatt ekkor $\left|\{\{p_i, p_j\} \mid \overline{p_i p_j} \in [t_1, t_1+1] \cup [t_2, t_2+1]\}\right| \le (1/4 + \text{const}\cdot\varepsilon_0)n^2 < n^2/3$, ε_0 alkalmas választásával.

Másodszor legyen $t_1 \ge \varepsilon_0 n$. Legyen G az a gráf, amelynek csúcsai $p_1, \dots, p_n$ és élei azon $\{p_i, p_j\}$ párok, amelyekre $\overline{p_i p_j} \in [t_1, t_1+1] \cup [t_2, t_2+1]$. Ha a feladatban állított egyenlőtlenséggel ellentétben G élszáma legalább $[n^2/3] + 1$, akkor a Turán gráftétel értelmében van G-ben teljes négyszög, sőt a Turán gráftétel variánsa szerint van egy $H = K(1, 1, 1, [\text{const}\cdot n])$ részgráfja is G-nek. Itt ezen részgráf csúcshalmaza A_1, A_2, A_3, A_4 diszjunkt uniója, ahol pl. $A_1 = \{p_1\}$, $A_2 = \{p_2\}$, $A_3 = \{p_3\}$, és $|A_4| = [\text{const}\cdot n]$.

A fenti H részgráf éleit színezzük: $\{p_i, p_j\}$ színe 1 vagy 2 lesz, aszerint hogy $\overline{p_i p_j} \in [t_1, t_1 + 1]$ vagy $\overline{p_i p_j} \in [t_2, t_2 + 1]$ teljesül (ha mindkettő teljesül, a szín tetszőlegesen választható). Osztályozzuk a $p_i \in A_4$ pontokat a $\{\{p_1, p_i\}, \{p_2, p_i\}, \{p_3, p_i\}\}$ élhármas színezései szerint 8 osztályba. Az egyik legnagyobb osztály legyen A_4'; ekkor fennáll $|A_4'| \ge [\text{const}\cdot n]$, és $p_i \in A_4'$ esetén a $\{p_1, p_i\}$, $\{p_2, p_i\}$, $\{p_3, p_i\}$ élek bármelyikének színezése p_i-től független. Legyen H' a H-nak az a részgráfja, amelynek csúcshalmaza $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4'$, és élhalmaza H-nak ezen csúcshalmaz által meghatározott összes éle.

Vegyük észre, hogy $t_2 \ge t_1 \ge \varepsilon_0 n$ miatt az azonos színű élek hosszának hányadosa legfeljebb $1 + 1/(\varepsilon_0 n)$, azaz az azonos színű élek hosszai majdnem egyenlők. Vegyük egy fix $p_i \in A_4'$ esetén a p_1, p_2, p_3, p_i pontokat. Ezek egy teljes négyszög részgráfot feszítenek ki H'-ben, amelynek élei két színnel vannak színezve. Itt mindkét szín előfordul, mivel a síkban nincs 4 pont, amelyek közötti bármely két távolság hányadosa közel 1. Így a lehetséges színezések a következők: egyik szín 1 élet tartalmaz, vagy 2 diszjunkt élet, vagy 2 csatlakozó élet, vagy egy háromszöget, vagy egy 3 hosszúságú utat.

Rövid diszkusszióval belátható, hogy $t_1/t_2 \ge$ const esetén (ahol a konstans kicsi) ezek geometriailag rendre a következőképp valósíthatók meg: $p_1p_2p_3p_i$ közel egy 1) $60°$-os rombusz; 2) négyzet; 3–4) egy kör középpontja, kerületén egy $60°$-os középponti szögű körív két végpontja, és a körív, ill. a komplementer körív középpontja; 5) egy szabályos háromszög csúcsai és középpontja; 6) egy szabályos ötszög 4 csúcsa. (A 3 hosszúságú út esetén ennek élei vagy egy kör egymáshoz csatlakozó 3 egyenlő húrja, amelyeknek α kerületi szögére $\sin 2\alpha = \sin 3\alpha$, így $\alpha \in \{36°, 72°, 108°, 144°\}$ teljesül; vagy a 3 hosszúságú út középső élének egyenese elválasztja a másik két élet, amikor is a pontok egy parallelogramma csúcsai, amelyre az élek négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével, amiből $2t_1^2 + 2t_2^2 \sim t_1^2 + t_2^2$, ami ellentmondás.)

Ha t_1/t_2 legfeljebb egy alkalmas kis pozitív konstans, akkor a háromszögegyenlőtlenség miatt p_1, p_2, p_3, p_i között az 1 színű élek teljes részgráfok csúcsdiszjunkt unióját alkotják, miközben, mint fent láttuk, a színezésben mindkét szín előfordul. Így pontosan egy él, ill. pontosan két diszjunkt él, ill. pontosan egy háromszög élei 1 színűek, amikor is $p_1p_2p_3p_i$ közel egy 7) szabályos háromszög, egy duplán számított csúccsal, ill., mint mindjárt megmutatjuk, 8) egy $t_1 \times t_2$-es téglalap, ill., az utolsó eset lehetetlen. Ha pl. pontosan $\{p_1, p_2\}$ és $\{p_3, p_i\}$ 1 színű, akkor a p_1p_2 és p_3p_i szakaszoknak a p_1p_3, p_1p_i, p_2p_3, p_2p_i szakaszokkal bezárt szöge közel $90°$, ha t_1/t_2 elég kicsi. Valóban, tekintsük pl. $p_1p_2p_3\sphericalangle$-et. Legyenek p_1', p_2' a p_1p_3, p_2p_3 szakaszoknak azon pontjai, melyekre $\overline{p_1'p_3} = \overline{p_2'p_3} = t_2$. Mivel $\overline{p_1p_2} \ge t_1 \ge \varepsilon_0 n$, azért a $p_1p_2p_3\sphericalangle$ és $p_1'p_2'p_3\sphericalangle$ közel egyenlők, és mivel t_1/t_2 kicsi, $p_1'p_2'p_3\sphericalangle$ közel $90°$; tehát $p_1p_2p_3\sphericalangle$ közel $90°$. Ha pl. pontosan $\{p_1, p_2\}$, $\{p_2, p_3\}$,

$\{p_3, p_1\}$ 1 színű, akkor p'_k $(k = 1, 2, 3)$ legyen a $p_k p_i$ szakasznak azon pontja, amelyre $\overline{p'_k p_i} = t_2$; ekkor p'_1, p'_2, p'_3 páronkénti távolsága közel t_1, ami lehetetlen.

Tehát a p_1, p_2, p_3, p_i pontok olyan pontnégyest alkotnak, amely közel van a fent leírt 8 konfiguráció valamelyikéhez. A 8 konfiguráció bármelyikének esetén ezen konfigurációnak a p_1, p_2, p_3, p_i pontokhoz közeli pontjai a konfiguráció 4 pontjának egy permutációját képezik. Osztályozzuk most a $p_i \in A'_4$ pontokat aszerint, hogy a $\{p_1, p_2, p_3, p_i\}$ pontnégyes a fenti 8 konfiguráció melyikéhez van közel, és egyszersmind ezen konfigurációnak a p_1, p_2, p_3, p_i pontokhoz közeli pontjai a konfiguráció 4 pontjának melyik permutációját képezik. (A 7. esetben a szabályos háromszög csúcsainak egy olyan felsorolásáról van szó, amelyben a duplán számított csúcs kétszer szerepel, és ezt használjuk az osztályozásnál a permutáció helyett.) Az egyik legnagyobb osztály legyen A''_4; ekkor fennáll $|A''_4| \geq [\text{const} \cdot n]$.

Tehát $p_i \in A''_4$ esetén a p_1, p_2, p_3, p_i pontok által feszített élek színezése p_i-től független (mivel ez már $p_i \in A'_4$ esetén így volt), és a $\{p_1, p_2, p_3, p_i\}$ pontnégyes p_i-től függetlenül a fenti 8 konfiguráció közül ugyanahhoz a konfigurációhoz van közel, méghozzá úgy, hogy külön-külön p_1, p_2, p_3, p_i a konfigurációnak valamely rögzített pontjához van közel. Mivel p_1, p_2, p_3 rögzített pont, így csak a p_i pont helyzetét kell vizsgálnunk. Vegyük észre, hogy a fenti 8 konfiguráció esetén a konfiguráció bármely pontjára fennáll a következő: az abból a pontból a többi három pont felé kiinduló szakaszok között van kettő, melyek bezárt szöge közel egy olyan α szög, amely 0-tól és 180°-tól különböző. (A 7. esetben a duplán számított csúcs esetén a szabályos háromszög másik két csúcsa felé menő szakaszt vesszük.) Ha pl. a p_i pont választása esetén a $p_1 p_i p_2 \sphericalangle$ közel α, ahol $\alpha \in (0, 180°)$ fix, akkor azt használjuk, hogy p_i benne van a p_1 középpontú, $t_k, t_k + 1$ belső, ill. külső sugarú körgyűrűnek és a p_2 középpontú, $t_l, t_l + 1$ belső ill. külső sugarú körgyűrűnek metszetében, ahol $k, l \in \{1, 2\}$ fixek.

Ekkor a segédállítás bizonyításához hasonlóan a $p_i \in A''_4$ pontok körüli 1/2 sugarú nyílt körök (diszjunkt) uniója benne van a p_1 körüli $t_k - 1/2$, $t_k + 3/2$ belső, ill. külső sugarú körgyűrűnek és a p_2 körüli $t_l - 1/2$, $t_l + 3/2$ belső, ill. külső sugarú körgyűrűnek D metszetében, amiből következően $|A''_4|\pi/4$ legfeljebb a D halmaz területe. D most két összefüggő komponensből áll, mert a fenti körgyűrűknek külső és belső körei is metszik egymást, $|\overline{p_1 p_i} - \overline{p_2 p_i}| + \text{const} \leq \overline{p_1 p_2} \leq \overline{p_1 p_i} + \overline{p_2 p_i} - \text{const}$ miatt, ahol const mindkétszer nagy konstanst jelöl. (Ez csak a 8-dik konfigurációhoz közeli pontnégyes esetén szorul bizonyításra, ahol a koszinusztétel közvetlen következménye.) A segédállítás bizonyításához hasonlóan D bármelyik komponense benne van egy 5/2 magasságú, közel α szögű rombuszban, ahol $\alpha \in (0, 180°)$ csak véges sok értéket vehet fel, amiből D területe legfeljebb konstans. Tehát $[\text{const} \cdot n] \leq |A''_4|$ és $|A''_4|\pi/4 \leq \text{const}$, ami ellentmondás. Ezzel a feladatban szereplő egyenlőtlenséget beláttuk, amivel a megoldást befejeztük.

Erdős Pál, Makai Endre és Pach János megoldása alapján

17 dolgozat érkezett. Megoldották: Ignasi Mundet Riera (Spanyolország), Drasnyi Gábor, Sustik Mátyás, Bíró András, Csörnyei Marianna, Vu Ha Van, Maróti Miklós, Fleiner Tamás. Pontatlan Benkő Dávid, Hegedűs László, Pór Attila, Hajdú Gábor dolgozata. Részeredményt ért el Prokaj Vilmos, Járai Antal, Keleti Tamás, Harcos Gergely, Pál Ambrus.

A 2. feladat megoldása

Álljon C az A halmaz azon elemeiből, amelyeknek legalább $k+2$ különböző prímosztójuk van. Ha $n \in C$, legyen $f(n)$ az n szám $k+1$ legkisebb prímosztójának szorzata. Ha ezek $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}$, akkor

$$n = p_1 \cdots p_{k+1} q,$$

ahol

$$q > \max p_i > \left(\prod p_i\right)^{\frac{1}{k+1}} = f(n)^{\frac{1}{k+1}},$$

így

$$n = f(n)q > f(n)^{\frac{k+2}{k+1}}.$$

$f(n)$ alakban egy szám legfeljebb $r-1$-féleképpen állhat elő, hiszen ha $f(n_1) = \ldots = f(n_r)$ volna, akkor $(n_1, \ldots, n_r)$ legalábbis a közös $f(n_i)$ értékét alkotó $k+1$ prímmel osztható lenne. Így viszont

$$\sum_{n\in C} 1/n \leq \sum_{n\in C} f(n)^{-\frac{k+2}{k+1}} \leq (r-1)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{k+2}{k+1}} < \infty.$$

Megjegyzés. A legfeljebb $k+1$ prím szorzatából álló számok halmaza a feladat feltételeit kielégíti, így a $k+1$ nem javítható k-ra. A következő javítás elérhető a bizonyítás apró módosításával: $A = B_1 \cup B_2 \cup C$, ahol B_1-ben a számoknak maximum k különböző prímosztójuk van, B_2-ben minden szám pontosan $k+1$ darab különböző prím szorzata és $\sum_{n\in C} 1/n < \infty$. Motiváció: egy Erdős–Hall–Tenenbaum cikkben a szerzők bebizonyították, hogy ha egy A halmaz teljesíti a feladat feltételeit, akkor a többszörösök halmazának van sűrűsége. A feladat tulajdonképpen azt mutatja, hogy a feltételből a legnagyobb közös osztó kihagyható.

Érkezett 21 dolgozat. Megoldották: Ignasi Mundet Riera (Spanyolország) Drasny Gábor, Bíró András, Csörnyei Marianna, Gács András, Vu Ha Van, Dormán Miklós, Prokaj Vilmos, Benczúr Péter, Hegedűs László, Keleti Tamás, Maróti Miklós. Pontatlan Benkő Dávid, Podoski Károly és Hegedűs Pál dolgozata. Részeredményt ért el Pór Attila, Fleiner Tamás, Járai Antal, Harcos Gergely, Sustik Mátyás.

A 3. feladat megoldása

Legyen α az $X^4 - 2X^2 - 1$ polinom egy gyöke , és $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Ekkor $\alpha^4 - 2\alpha^2 - 1 = 0$, és így $\beta = \alpha - 1$ jelöléssel $\beta \in K$, sőt $K = \mathbb{Q}(\beta)$, és

$$(\beta+1)^4 - 2(\beta+1)^2 - 1 = \beta^4 + 4\beta^3 + 4\beta^2 - 2 = 0,$$

vagyis β gyöke az $X^4 + 4x^3 + 4x^2 - 2$ polinomnak, amely a 2-re nézve Eisenstein-féle, tehát $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis. K negyedfokú $\mathbb{Q}$ felett, β generálja K-t $\mathbb{Q}$ felett, és β minimálpolinomja $X^4 + 4X^3 + 4X^2 - 2$, vagyis β normája $N_{K/}\ (\beta) = -2$. Tekintsük a K egészeinek R-rel jelölt gyűrűjében a β által generált (β) főideált (a β algebrai egész). Ismeretes, hogy az $R/(\beta)$ faktorgyűrű elemszáma $|N_{K/}\ (\beta)|$-kel egyenlő, tehát most $|R/(\beta)| = 2$.

Legyen most ϵ egység R-ben. Akkor nem lehet $\epsilon \in (\beta)$, mert ha így lenne, akkor $(\beta) = R$, pedig $|R/(\beta)| = 2$. Ugyanúgy $1 \notin (\beta)$. De $R/(\beta)$ kételemű, ezért $\epsilon \notin (\beta), 1 \notin (\beta)$-ból következik, hogy $\epsilon \equiv 1(\beta)$, tehát $1 - \epsilon \in \beta$. Láttuk már, hogy egység nem lehet (β)-nak eleme, tehát $1-\epsilon$ nem egység, ϵ nem kivételes egység.

15 dolgozat érkezett. Megoldották: Bíró András, Podoski Károly, Maróti Miklós, Gács András, Harcos Gergely, Drasny Gábor, Sustik Mátyás, Prokaj Vilmos, Hegedűs Pál, Csörnyei Marianna. Pontatlan Fleiner Tamás dolgozata. Részeredményt ért el Keleti Tamás, Hajdú Gábor, Pál Ambrus, Járai Antal.

A 4. feladat megoldása

Olyan négyváltozós műveletet fogunk előállítani f szuperpozíciójaként, amelyre

a) $g(x, y, z, t) = x$ minden olyan esetben, amikor x, y, z és t között vannak megegyező elemek;

b) találhatóak olyan a, b, c, d különböző elemek, amelyekre $g(a, b, c, d) \neq a$.

A b) feltétel cáfolja, hogy $g(x,y,z,t) \equiv x$ lenne, továbbá g a többi változójával sem lehet azonosan egyenlő, amit például a második változóra a $g(a,b,a,a) = a \neq b$ összefüggés mutat. Így g nemtriviális művelet.

Megmutatjuk, hogy ilyen g-nek f nem szuperpozíciója, ugyanis g szuperpozíciójaként csak a triviális háromváltozós műveleteket lehet előállítani. Ezt az egymásba ágyazás mélységére vonatkozó teljes indukcióval bizonyíthatjuk. Ha ez egy, akkor g négy argumentuma közül legalább kettőben azonos változó szerepel, így az argumentumok nem mind különbözőek, tehát az első argumentumban szereplő változóval azonosan egyenlő a szuperpozíció. Ha egy bizonyos mélységig már igazoltuk az eljárást, és p, q, r, s g-nek legfeljebb ilyen mélységű szuperpozíciója, akkor

$$g\big(p(x_1,x_2,x_3), q(x_1,x_2,x_3), r(x_1,x_2,x_3), s(x_1,x_2,x_3)\big) \equiv$$
$$\equiv g(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}) \equiv x_{i_1}$$

az indukciós feltevés szerint, amivel ezt az állítást beláttuk. (Az, hogy f nemtriviális, a feladat (2) feltételéből következik.)

Így elegendő az első bekezdésben leírt tulajdonságú g függvényt konstruálni. Legyen

$$g_1(x,y,z,t) = f\big(x, f(x,y,z), f(x,y,t)\big),$$
$$g_2(x,y,z,t) = f\Big(x, f(y,z,t), f\big(x,y,f(y,z,t)\big)\Big).$$

Belátjuk, hogy az a) feltétel teljesül mindkét műveletre. g_1 esetén ez közvetlenül a feladat (1) feltételéből következik, ezért csak a g_2-re részletezzük az a) feltétel ellenőrzését. Ha $y = z, t = y$ vagy $t = z$, akkor $f\big(x,y,f(y,z,t)\big) = f(x,y,y) = x$, így $g_2(x,y,z,t) = x$. Ha $x = y$, akkor $f\big(x,y,f(y,z,t)\big) = f\big(x,x,f(y,z,t)\big) = x$, így ismét $g_2(x,y,z,t) = x$. Legyen $x = z$ és $y \neq z \neq t \neq y$, ekkor (2) miatt $f(y,z,t) \in \{y,z,t\} = \{x,y,t\}$. Ha $f(y,z,t) \in \{x,y\}$, akkor $f\big(x,y,f(y,z,t)\big) = x$ tehát $g_2(x,y,z,t) = x$. Ha viszont $f(y,z,t) = t$, akkor

$$g_2(x,y,z,t) = f\big(x,t,f(x,y,t)\big) = f(x,t,t) = x,$$

hiszen (2) szerint $f(x,y,t) = f(z,y,t) = t$. (A (2) feltételből következik, hogy f művelet eredménye az argumentumok tetszőleges permutációjára ugyanaz, ha az argumentumok különbözőek). Mivel z és t szerepe felcserélhető g_2-ben ($f(y,z,t) = f(y,t,z)$ akkor is igaz, ha y,z,t között egyenlőek is vannak), így $x = t$ esetén is $g_2(x,y,z,t) = x$.

Most belátjuk, hogy g_1 és g_2 közül legalább az egyik teljesíti a b) feltételt is. Legyenek A, B, C, D különböző elemek a halmazból. Az elnevezéseket úgy választjuk, hogy $f(A,B,C) = A$ legyen. Négy esetet különböztetünk meg:

(i) $f(B,C,D) \neq D$, feltehető, hogy $f(B,C,D) = B$. Ekkor

$$g_1(C,B,A,D) = f\big(C, f(C,B,A), f(C,B,D)\big) = f(C,A,B) = A \neq C.$$

(ii) $f(B,C,D) = D, f(A,C,D) = D$. Ekkor

$$g_1(C,A,D,B) = f\big(C, f(C,A,D), f(C,A,B)\big) = f(C,D,A) = D \neq C.$$

(iii) $f(B,C,D) = D, f(A,C,D) = A$. Ekkor

$$g_1(C,D,A,B) = f\big(C, f(C,D,A), f(C,D,B)\big) = f(C,A,D) = A \neq C.$$

(iv) $f(B,C,D) = D, f(A,C,D) = C$. Ekkor

$$g_2(D,C,A,B) = f\Big(D, f(C,A,B), f\big(D,C,f(C,A,B)\big)\Big) =$$
$$= f\big(D,A,f(D,C,A)\big) = f(D,A,C) = C \neq D.$$

Mivel a négy eset közül valamelyik biztosan teljesül, így g_1 vagy g_2 teljesíti a b) feltételt, így a feladatbeli g műveletre példát ad.

Megjegyzés. A bizonyításban használt g_2 helyett gazdaságosabb kifejezést talált Fleiner Tamás és Prokaj Vilmos:

$$g_2(x,y,z,t) = f\Big(x,y,f\big(x,t,f(t,y,z)\big)\Big).$$

Ennél kevesebb változót tartalmazó g_2-vel a feladat nem oldható meg.

12 dolgozat érkezett. Megoldották: Drasny Gábor, Fleiner Tamás, Csörnyei Marianna, Gács András, Maróti Miklós, Pór Attila, Prokaj Vilmos. Részben jó Hajdú Gábor munkája. Részeredményt ért el Sustik Mátyás.

Az 5. feladat megoldása

Azt fogjuk bizonyítani, hogy a feladat kérdésére a válasz tagadó. Tegyük fel indirekten, hogy létezik a valós számoknak olyan $\prec$ jólrendezése, amelyre a sík $S = \{(x,y) : x \prec y\}$ részhalmazának az $E_r = \{(x, x+r) : x \in \mathbb{R}\}$ egyenessel való metszete minden $r \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ esetén Lebesgue-mérhető.

Tetszőleges $r \neq 0$ racionális számra az $f_r(x) = (x, x+r)$ képlettel definiált $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ függvény folytonos, így az

$$A_r = \{x \in \mathbb{R} : x \prec x + r\} = f_r^{-1}(S \cap E_r)$$

halmaz is Lebesgue-mérhető. Következésképpen ugyancsak Lebesgue-mérhető az

$$A = \bigcap_{r\in \ \setminus\{0\}} A_r = \{x \in \mathbb{R} : x \prec x + r \text{ minden } r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ esetén }\}$$

halmaz, amely a valós számok additív csoportjának a racionális számokból álló additív részcsoportja szerint vett minden mellékosztályából pontosan egy elemet tartalmaz (a $\prec$ jólrendezés szerint legkisebbet). Az A halmaz említett tulajdonságai teljesülnek a

$$B = \{a - [a] : a \in A\} = \bigcup_{k\in} \big((A \cap [k, k+1[) - k\big)$$

halmazra is (tehát B mérhető és minden mellékosztályból pontosan egy elemet tartalmaz), továbbá $B \subset [0,1[$. Az ismert gondolatmenet szerint azonban a B halmazt a $K =]-1,1[\cap\mathbb{Q}$ megszámlálhatóan végtelen számosságú halmaz elemeivel eltolva páronként diszjunkt halmazokat kapunk, melyeknek $B + K$ uniójára $[0,1[\subset B + K \subset]-1,2[$ teljesül, így $1 \leq \lambda(B+K) \leq 3$, ami

$$\lambda(B + K) = \sum_{k\in K} \lambda(B + k) = \sum_{k\in K} \lambda(B)$$

miatt a $\lambda(B) = 0$ és a $\lambda(B) > 0$ esetekben egyaránt ellentmondásra vezet.

6 dolgozat érkezett. Megoldották: Bíró András és Drasny Gábor.

A 6. feladat megoldása

Az A halmaznak van két pontja, R_1 és R_2, amelyek távolsága nagyobb 4-nél. Vetítsük az egész rendszert az R_1R_2 egyenesre. Mivel a vetítés során a távolság nem nő, elegendő azt az esetet tekinteni, amikor $A = [-a, a]$, $a > 2$ (egy 4-nél hosszabb intervallum) és minden P_n a valós egyenesen van.

Legyen $S_n(x) = \prod_{1\leq j\leq n}(x - P_j)$. Ekkor S_n n-ed fokú polinom. Legyen $E_n = \{x \in [-a,a] : b||S_n(x)| > 1\}$. Állítjuk, hogy az E_n halmaz $\mu(E_n)$ egydimenziós Lebesgue-mértéke egy pozitív σ alsó korlát felett marad. Tegyük fel ugyanis, hogy ez nem így van. Akkor van olyan n, hogy E_n mértéke kisebb lesz, mint $2a - 4$. Legyen $x \in]-\infty, -a[$ esetén $T(x) = x$, $x \in [-a, \infty[$ esetén pedig $T(x) = x - \mu([-a,x] \cap E_n)$, valamint $S_n^*(x) = \prod_{1\leq j\leq n}\big(x - T(P_j)\big)$.

Most belátjuk, hogy $T([-a,a]) = T([-a,a] \setminus E_n)$. Legyen ugyanis $y \in T([-a,a])$, akkor létezik $x_1 \in [-a,a]$ úgy, hogy $y = x_1 - \mu([-a,x_1] \cap E_n)$. Másrészről S_n polinom, ezért E_n nyílt részhalmaza a $[-a,a]$ metrikus térnek, mégpedig véges sok intervallum uniója, továbbá (a mértékére vonatkozó feltevés miatt) a $[-a,a]$ intervallum valódi részhalmaza. Ha $x_1 \notin E_n$, készen vagyunk. Ha $x_1 \in E_n$, akkor az E_n halmaz x_1 pontot tartalmazó komponensének valamelyik x_0 végpontja a fentiek szerint E_n komplementerében van. Másrészről E_n komponenseinek lezártjain T konstans, tehát $y = T(x_1) = T(x_0)$, így $y \in T([-a,a] \setminus E_n)$.

Világos, hogy minden x_1, x_2 valós számra $|T(x_1) - T(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$, ezért T folytonos, így a $T([-a,a])$ képhalmaz intervallum. Továbbá T monoton nemcsökkenő, tehát $\mu(T([-a,a])) = T(a) - T(-a) = 2a - \mu(E_n) > 4$. Másrészről az előzőek szerint minden $y \in T([-a,a])$ esetén létezik $x \in [-a,a] \setminus E_n$ úgy, hogy $y = T(x)$, így

$$|S_n^*(y)| = \prod_{1 \leq j \leq n} |y - T(P_j)| = \prod_{1 \leq j \leq n} |T(x) - T(P_j)| \leq$$
$$\leq \prod_{1 \leq j \leq n} |x - P_j| = |S_n(x)| \leq 1.$$

De Csebisev tétele szerint nincs olyan 1 főegyütthatós polinom, amely egy 4-nél hosszabb intervallumon 1-nél nem nagyobb lenne abszolút értékben.

Tehát minden n természetes számra $\mu(E_n) \geq 2a - 4 = \sigma > 0$, amiből nyilván $\mu(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n) \geq \sigma$ következik minden m természetes számra, ezért a mérték folytonossága alapján

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right) \geq \sigma > 0,$$

ennélfogva a $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n$ halmaz nem üres.

A második állítás igazolására legyen $A = [0,4]$ és tekintsük a Csebisev polinomok alábbi transzformáltjait:

$$q(z;n,a) = 2a^n \cos\left(n \arccos\left(\frac{z}{2a} - 1\right)\right).$$

Ezek 1 főegyütthatójú polinomok, amelyek a $[0,4a]$ intervallumon abszolút értékben nem nagyobbak, mint $2a^n$. Ebből következik, hogy ha $z_1(n,a), \dots, z_n(n,a)$ jelölik $q(z;n,a)$ zérushelyeit és $P_1 = 4$, továbbá a $P_2, P_3, \dots$ pontokat rendre úgy választjuk meg, hogy minden $m \geq 2$ természetes számra a $z_1\left(m, 1 - \frac{1}{m}\right), z_2\left(m, 1 - \frac{1}{m}\right), \dots, z_m\left(m, 1 - \frac{1}{m}\right)$ elemek valamennyien k_m példányban szerepeljenek köztük, akkor alkalmas $k_2, k_3, \dots$ számokkal a $\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2} \cdot \dots \cdot \overline{PP_n}$ szorzatok minden $P \in [0,4]$ pontra a 0-hoz tartanak.

11 dolgozat érkezett. Megoldották: Bíró András, Drasny Gábor és Hajdú Gábor. Lényegében jó Sustik Mátyás megoldása. Értékes részeredményt ért el Vu Ha Van (az első állítást teljesen igazolta) és Pór Attila (a második állítást igazolta).

A 7. feladat megoldása

Egy folytonos $f : H \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor tesz eleget a kérdéses egyenletnek, ha van olyan $A : H \to H$ korlátos, lineáris, önadjungált operátor, $a \in H$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy

(1) $$f(x) = \langle A(x) + a, x \rangle + \alpha \qquad (x \in H).$$

Számolással ellenőrizhető, hogy (1) megoldása a feladatnak.

Megfordítva, legyen $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos és tegyen eleget a feladatbeli egyenletnek. Definiáljuk az F függvényt

$$F(x,y) = f(x+\pi y) - f(x+\sqrt{2}y) - f(\pi y) + f(\sqrt{2}y) \quad (x,y \in H) \tag{2}$$

szerint. Ekkor a megoldandó egyenletből

$$F(x+y,z) = F(x,z) + F(y,z) \quad (x,y,z \in H) \tag{3}$$

adódik. Továbbá (2) és (3) miatt minden $x, y \in H$ esetén

$$F\left(x, \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) = F\left(x-y, \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) + F\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) =$$
$$= f\left(x-y+\frac{\pi}{\sqrt{2}}y\right) - f(x) - f\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}y\right) + f(y) + F\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}y\right),$$

speciálisan $x = 0$ választással

$$0 = f\left(-y+\frac{\pi}{\sqrt{2}}y\right) - f(0) - f\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}y\right) + f(y) + F\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}y\right),$$

ezért

$$F\left(x, \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) = f\left(x + \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}-1\right)y\right) - f(x) - f\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}y\right) + f(0),$$

és így

$$F\left(x, \frac{1}{\pi-\sqrt{2}}y\right) = f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0) \quad (x,y \in H). \tag{4}$$

Legyen

$$G(x,y) = F\left(x, \frac{1}{\pi-\sqrt{2}}y\right) \quad (x,y \in H). \tag{5}$$

Ekkor (3) és (4) miatt G folytonos, szimmetrikus és mindkét változójában additív függvény (folytonos bilineáris funkcionál). Ezért a Riesz-féle reprezentációs tétel egy következménye szerint létezik olyan $A : H \to H$ korlátos lineáris, önadjungált operátor, hogy $G(x,y) = 2\langle A(x), y\rangle$ $(x, y \in H)$. Másrészt

$$G(x,y) = 2\langle A(x), y\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x), x\rangle - \langle A(y), y\rangle + \langle A(0), 0\rangle,$$

ezért (4) és (5) miatt a

$$g(x) = f(x) - \langle A(x), x\rangle \quad (x \in H) \tag{6}$$

függvényre

$$g(x+y) - g(0) = g(x) - g(0) + g(y) - g(0) \quad (x,y \in H)$$

teljesül. Így $g - g(0)$ folytonos lineáris funkcionál, tehát Riesz tétele szerint van olyan $a \in H$, amelyre

$$g(x) - g(0) = \langle a, x\rangle \quad (x \in H). \tag{7}$$

Végül legyen $\alpha = g(0)$ és így (6)-ból és (7)-ből következik (1).

18 dolgozat érkezett. Megoldották: Ignasi Mundet Riera (Spanyolország), Benczúr Péter, Bíró András, Drasny Gábor, Gács András, Harcos Gergely, Járai Antal, Keleti Tamás, Maróti Miklós, Prokaj Vilmos és Vu Ha Van. Lényegében jó Hajdú Gábor megoldása. Részeredményt ért el Fleiner Tamás, Podoski Károly, Pór Attila és Sustik Mátyás.

A 8. feladat megoldása

Három ilyen rész $*$-algebra van: $\{0\}$, a véges rangú korlátos lineáris operátorok $\mathcal{F}(H)$ algebrája és $\mathcal{B}(H)$. Az, hogy ezen algebrák rendelkeznek a feladatban leírt tulajdonsággal, csak az $\mathcal{F}(H)$ esetében szorul bizonyításra. Ha $A \in \mathcal{B}(H)$ és $T \in \mathcal{F}(H)$, akkor legyen P a $(TA)^*$ és T^* értékkészletei által generált véges dimenziós altérre való ortogonális projekció. Ekkor $TA = T(AP)$ és $AT^* = (AP)T^*$ miatt $S = AP \in \mathcal{F}(H)$ választással $TA - AT^* = TS - ST^*$.

Legyen most $\mathcal{A}$ olyan rész $*$-algebrája $\mathcal{B}(H)$-nak, ami rendelkezik a feladat szövegében szereplő tulajdonsággal. Legyen $A \in \mathcal{B}(H)$ és $T \in \mathcal{A}$. Ekkor

$$TA - AT^* \in \mathcal{A} \text{ és } i(TA + AT^*) = (iT)A - A(iT)^* \in \mathcal{A},$$

amiből azonnal adódik, hogy $TA \in \mathcal{A}$. Mivel $\mathcal{A}$ zárt az adjungálásra nézve, következik, hogy $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ ideál. Így alkalmazható a $\mathcal{B}(H)$ ideáljaira vonatkozó J. W. Calkintól származó klasszikus eredmény:

$\mathcal{B}(H)$ tetszőleges nemtriviális $\mathcal{I}$ ideáljára $\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{C}(H)$,

ahol $\mathcal{C}(H)$ jelöli a kompakt lineáris operátorok ideálját H-n (lásd pl. [1, 5.5 Proposition és 5.11 Corollary illetve bizonyításaik]). Az operátorok poláris felbontásának egyszerű következményeként az is ismeretes, hogy $\mathcal{I}$ zárt az abszolút érték képzésre nézve. Megjegyezzük még, hogy a továbbiakban $x, y \in H$ esetén használni fogjuk a szokásos $x \otimes y$ jelölést az

$$(x \otimes y)(z) = \langle z, y \rangle x \qquad (z \in H)$$

módon értelmezett operátorra.

Tegyük fel tehát, hogy $\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{C}(H)$ és $\mathcal{A}$ tartalmaz egy nem véges rangú operátort. Könnyen látszik, hogy ekkor ennek abszolút értéke sem lehet véges rangú. A kompakt operátorok spektráltételéből adódóan így van olyan (μ_n) monoton csökkenő pozitív tagú nullsorozat és (e_n) ortonormált rendszer, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_n \otimes e_n \in \mathcal{A},$$

ahol a konvergencia az operátor normában értendő. Mivel $\mathcal{A}$ ideál, így a $\sum_n e_n \otimes e_{n+1}$ parciális izometriával ezen operátort jobbról megszorozva adódik, hogy

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n e_n \otimes e_{n+1} \in \mathcal{A}.$$

Legyen most (λ_n) korlátos nem nullsorozat és tekintsük az

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n$$

módon definiált korlátos lineáris operátort. Legyen $S \in \mathcal{A}$ olyan, melyre

$$TA - AT^* = TS - ST^*.$$

Tekintve mindkét oldalt az e_{n+1} helyen és belső szorzatot véve e_n-nel ebből azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{n+1} = \langle Se_{n+1}, e_{n+1}\rangle - \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\langle Se_{n+2}, e_n\rangle \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel innen következően (Se_n) nem tart 0-hoz, így S nem kompakt, ami ellentmond az $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(H)$ feltételnek.

Hivatkozás:

[1] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, New York and London, 1972.

6 dolgozat érkezett. Megoldották: Bíró András és Prokaj Vilmos. Részeredményt ért el Battyányi Péter és Gács András.

A 9. feladat megoldása

Tetszőleges $v \in T_p\mathbb{R}^n$ érintővektor és $Z : \mathbb{R}^n \to E$ metszet esetén legyen

$$\nabla_v Z := [V, Z](p),$$

ahol $V : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$, $p \mapsto V(p) := (p, v)$ a „v-nek megfelelő" konstans vektormező. A feltétel értelmében ekkor $\nabla_v Z \in E_p$. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy így egy ∇ lineáris konnexiót adtunk meg a $\pi : E \to \mathbb{R}^n$ vektornyalábon. Példaként megmutatjuk, hogy

$$\nabla_{fY} Z = f\nabla_Y Z \quad \big(f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)\big).$$

Legyen $p \in \mathbb{R}^n$ tetszőlegesen rögzített pont, $\tilde{Y}$ pedig az

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \tilde{Y}(x) := \big(x, Y(p)\big)$$

konstans vektormező. Ekkor

$$\begin{aligned}(\nabla_{fY} Z)(p) = \nabla_{f(p)Y(p)} Z := \big[f(p)\tilde{Y}, Z\big](p) = \\ = f(p)[\tilde{Y}, Z](p) =: f(p)\nabla_{Y(p)} Z = (f\nabla_Y Z)(p),\end{aligned}$$

amint állítottuk.

Belátjuk, hogy ∇ *flat konnexió,* azaz R görbületi tenzora eltűnik.

$$R(X, Y)Z \quad \big(X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)\big), Z \in \operatorname{Sec} E)$$

kiszámításakor R tenzori karaktere folytán feltehetjük, hogy $X := A$ és $Y := B$ konstans vektormező. Ekkor $[A, B] = 0$, és R definíciója valamint a $[\ ,\ ]$-re vonatkozó Jacobi-identitás alapján

$$R(A, B)Z = \nabla_A\nabla_B Z - \nabla_B\nabla_A Z = \big[A, [B, Z]\big] - \big[B, [A, Z]\big] = \big[[A, B], Z\big] = 0.$$

$R = 0$ folytán ismert módon következik olyan

$$Z_i : \mathbb{R}^n \to E \qquad (1 \le i \le r = \operatorname{rang} E)$$

metszetek létezése, hogy $\nabla_X Z_i = 0$ minden $X \in \mathbb{R}^n$ és $1 \le i \le r$ esetén. Így — speciálisan — minden $A \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ konstans vektormezővel teljesül, hogy $[A, Z_i] = 0$ $(1 \le i \le r)$, amiből egyszerűen következik, hogy a Z_i metszetek mindegyike konstans, azaz $Z_i(p) = (p, z_i)$ minden $p \in \mathbb{R}^n$ pontra. Ez azonban azt jelenti, hogy tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$ esetén az E_p fibrumot ugyanazok a $z_1, z_2, \ldots, z_r$ vektorok feszítik ki:

$$E_p = p + \mathcal{L}(z_1, z_2, \ldots, z_r),$$

tehát E egy párhuzamos síkmező.

1 dolgozat érkezett. Megoldást vagy értékes részeredményt egyetlen versenyző sem adott.

A 10. feladat megoldása

A kérdéses eseményre vezessük be az

$$A = \left\{p_1 + (p_2 - p_1)U_3^* + (p_3 - p_2)U_2^* + (1 - p_3)U_1^* \geq \frac{1}{2}\right\}$$

jelölést. A rendezett minta eloszlására vonatkozó közismert állítás alapján

$$\mathbb{P}\{U_j^* \leq x\} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{3}{k} x^k (1-x)^{3-k}.$$

Ebből

$$(1) \qquad (1 - p_1)^3 = \alpha$$
$$(2) \qquad (1 - p_2)^2(1 + 2p_2) = \alpha$$
$$(3) \qquad 1 - p_3^3 = \alpha$$

adódik. Az $\alpha = 0$ és $\alpha = 1$ esetekben az állítás triviális, ezért feltesszük, hogy $\alpha \in (0,1)$. Ekkor $0 < p_1 < p_2 < p_3 < 1$. Jól ismert az is, hogy (U_1^*, U_2^*, U_3^*) egyenletes eloszlású a

$$T = \left\{x \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1\right\}$$

tetraéderben. Tekintsük az

$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^3 | p_1 + (p_2 - p_1)x_3 + (p_3 - p_2)x_2 + (1 - p_3)x_1 \geq \frac{1}{2}\right\}$$

félteret. A $\mathbb{P}(A)$ valószínűség nyilván a $T \cap F$ és a T testek hányadosa.

Ha $0 < \alpha \leq 1/8$, akkor $p_1 \geq 1/2$, amiből $\mathbb{P}(A) = 1$, így az állítás teljesül.

Ha $1/8 < \alpha \leq 1/2$, akkor $p_1 < 1/2 \leq p_2$, és $T \cap F = T \setminus (T \cap F^c)$, ahol $T \cap F^c$ egy tetraéder, melynek csúcsai a $(0,0,0), (0,0,q_{1,2}), (0,q_{1,3},q_{1,3})$ és $(q_{1,4}, q_{1,4}, q_{1,4})$ pontok, ahol

$$q_{i,j} = \frac{\frac{1}{2} - p_i}{p_j - p_i},$$

és $p_4 = 1$. A $T \cap F^c$ tetraéder térfogata $q_{1,2}q_{1,3}q_{1,4}/6$, így most

$$\mathbb{P}(A) = 1 - q_{1,2}q_{1,3}q_{1,4} \geq 1 - q_{1,4} \geq 1 - \alpha,$$

hiszen (1) alapján

$$q_{1,4} = \frac{\frac{1}{2} - p_1}{1 - p_1} = 1 - \frac{1}{2(1 - p_1)} = 1 - \frac{1}{2\alpha^{1/3}} \leq \alpha.$$

Ha $1/2 < \alpha \leq 7/8$, akkor $p_2 < 1/2 \leq p_3$, és

$$\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}\left\{p_1 + (p_2 - p_1)U_3^* + \left(\frac{1}{2} - p_2\right)U_2^* + \frac{1}{2}U_1^* \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

A jobboldalon álló valószínűség a $T \cap F_1$ és a T testek hányadosa, ahol F_1 az

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid p_1 + (p_2 - p_1)x_3 + \left(\frac{1}{2} - p_2\right)x_2 + \frac{1}{2}x_1 \geq \frac{1}{2}\right\}$$

félteret jelöli. Most $T \cap F_1$ egy tetraéder, melynek csúcsai az $(1,1,1), (0,1,1), (q_{2,4}, q_{2,4}, 1)$ és $(q_{1,4}, q_{1,4}, q_{1,4})$ pontok, így térfogata $(1 - q_{1,4})(1 - q_{2,4})/6 = q_{4,1}q_{4,2}/6$. Ebből (1) és (2) alapján

$$\mathbb{P}(A) \geq q_{4,1}q_{4,2} = \frac{1}{4(1-p_1)(1-p_2)} = \frac{1}{4\alpha}\frac{(1-p_1)^2}{1-p_2} = \frac{1}{4\alpha}\frac{(1-p_2)(1+2p_2)}{1-p_1} \geq \frac{1}{4\alpha} \geq 1 - \alpha.$$

Ha $7/8 < \alpha < 1$, akkor

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left\{p_1(1 - U_3^*) + p_2(U_3^* - U_2^*) + p_3(U_2^* - U_1^*) + U_1^* \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

Ezzel az α összes értékére kész a bizonyítás.

Megjegyzés. A feladat állítása egy szerény speciális esete az úgynevezett Stringer-bound sejtésnek, amely általánosságban nem bizonyított: Legyenek $X_1, \ldots X_n$ független valószínűségi változók $[0,1]$-ben, melyeket nagyság szerint rendezve $X_1^* \leq \ldots X_n^*$ adódik. Legyenek $\alpha, p_1, p_2 \ldots p_n \in [0,1]$ olyanok, hogy $\mathbb{P}\{X_j^*\} = \alpha$, $j = 1, \ldots, n$. Ekkor a sejtés szerint

$$\mathbb{P}\{p_1 + (p_2 - p_1)X_n^* + (p_3 - p_2)X_{n-1}^* + \ldots + (p_n - p_{n-1})X_2^* + (1 - p_n)X_1^* \geq \mu\} \geq 1 - \alpha,$$

ahol $\mu = \mathbb{E}X_1$. (Lásd P. J. Bickel, Inference and Auditing: The Stringer Bound, *International Statistical Review* (1992) **60**, 2, pp. 197–209.)

11 megoldás érkezett. Megoldották: Bíró András, Vu Ha Van, Csörnyei Marianna, Keleti Tamás. Pontatlan Drasny Gábor dolgozata. Részeredményt ért el Prokaj Vilmos, Pór Attila és Fleiner Tamás.

KVANTITATIV EXTRÉM GRÁF PROBLÉMÁK KLIKKEKRŐL ÉS KÖRÖKRŐL

GYŐRI ERVIN

BEVEZETÉS

A klasszikus extremális gráfelméleti tételek úgy szólnak, hogy ha egy n pontú gráf élszáma nagyobb, mint $f(n)$, akkor a gráf tartalmaz egy bizonyos G gráfot részgráfként, és rendszerint pontosan leírható az n pontú, $f(n)$ élű G-t részgráfként nem tartalmazó — többnyire egyértelmű — extrém gráf struktúrája. Ebben az áttekintő jellegű cikkben bizonyos értelemben ezekhez hasonló, bizonyos értelemben ezektől különböző problémákkal foglalkozunk, amiket — nem ismervén más kifejezést rájuk — kvantitatív extrém gráf problémáknak nevezünk, bár tulajdonképpen az él-Ramsey problémákkal is rokon természetűek. Ezekben a kérdésekben nem azt vizsgáljuk, hogy milyen élszámnál jelenik meg a G gráf részgráfként, hanem hogy milyen élszámnál következik be a G gráfok számában vagy G éldiszjunkt példányainak számában valamilyen drasztikus, minőségi jellegű változás. Vagy például nem azt nézzük, hogy mi a maximális élszáma egy gráfnak, ami nem tartalmazza G-t részgráfként, hanem fordítva, bizonyos feltételek mellett milyen gráf tartalmazza a lehető legtöbb példányát G-nek.

Egy ilyen összefoglaló jellegű cikkben természetesen nem szerepelnek bizonyítások, de azért ejtsünk legalább néhány szót a használt módszerekről, eszközökről. A bizonyításokban használt módszerek jellegzetes extremális gráfelméleti technikák és a kvantitatív jellegű kérdések eredményeképpen ezeket időnként kombinálni kell standard és ad hoc leszámlálási módszerekkel. A leghasznosabbaknak az úgynevezett stabilitási tételeken alapuló bizonyítási módszerek bizonyultak. Ez azt jelenti, hogy ha egy gráf élszáma vagy a pontok fokai közel vannak az adott tulajdonságra jellemző extrém értékhez és a gráfnak megvan ez a tulajdonsága, akkor nagy pontossággal leírható a gráf struktúrája. Egyes esetekben már ismertek voltak ezek a stabilitási tételek, és jó kiindulási pontnak bizonyultak a bizonyításokhoz, máskor finomítani kellett a már meglevőket, de sokszor új stabilitási tételeket kellett bebizonyítani, hogy egyáltalán el tudjuk kezdeni a konkrét kérdés vizsgálatát. A már meglevő eredmények közül a Turán-tétel Lovász és Simonovits ([LS]) által bebizonyított stabilitását említeném — ami érdekes módon maga volt a saját finomításának a kiindulópontja —, és a Zykovtól ([Zy]) származó, már klasszikusnak számító szimmetrizáció módszerét.

0. FONTOSABB JELÖLÉSEK, DEFINÍCIÓK

Gráf alatt egyszerű gráfot értünk többszörös és hurokél nélkül. Az x és y pontokat összekötő élt xy-nal jelöljük. $N(v)$ illetve $d(v)$ a v pont szomszédainak halmaza illetve száma (azaz a pont foka). A $G = (V, E)$ gráf pont- illetve élhalmazát $V(G)$-vel illetve $E(G)$-vel, ezek számosságát pedig $v(G)$-vel illetve $e(G)$-vel jelöljük. Emellett a gráf pontszáma tipikusan n és néha használjuk az n pontú m élű G gráfra a $G(n, m)$ jelölést is.

$W \subseteq V(G)$-re $G[W]$ vagy $G(W)$ jelöli G-nek a W ponthalmaz által feszített részgráfját. Ezzel összhangban, némi pontatlansággal használjuk a $G - x$ jelölést $G\big(V(G) - \{x\}\big)$ helyett. Hasonló értelemben $e \in E(G)$-re $G - e$ jelöli a $\big(V(G), E(G) - \{e\}\big)$ gráfot.

$A, B \subseteq V(G)$-re $d_G(A, B)$ az A-ból B-be vezető G-beli élek számát jelöljük, de a G indexet nem használjuk, ha egyértelmű, hogy melyik gráfról van szó. $d_G\big(\{v\}, A\big)$ helyett $d_G(v, A)$-t írunk, $d_G(A)$ pedig a $G(A)$ gráf élszámát jelöli. Vigyázat, $x, y \in V(G)$-re $d_G(x, y)$ az x és y pontok távolsága G-ben, ami az őket összekötő legkisebb élszámú út élszáma.

Az r pontú teljes gráfot K_r-rel jelöljük. A $G(n_1, \dots, n_k)$-val vagy $G[n_1, \dots, n_k]$-val jelölt gráf úgy kapható a k pontú G gráfból, hogy annak pontjait rendre $n_1, n_2, \dots, n_k$ független ponttal helyettesítjük, és két ilyen független halmazt teljesen összekötünk egymással, ha a megfelelő pontok G-ben össze voltak kötve egymással, egyébként pedig egyetlen élt sem húzunk be a két halmaz közé. Ennek speciális eseteként is felfogható az n pontú $(r-1)$-részes $T_{r-1}(n) = K_{r-1}[n_1, \dots, n_{r-1}]$ Turán-gráf, ahol $n_1 + \ldots + n_{r-1} = n$ és az n_i-k között legfeljebb egy a különbség. A $T_{r-1}(n)$ Turán-gráf élszámát $t_{r-1}(n)$-nel jelöljük.

G és H gráfokból a $G + H$ gráfot úgy kapjuk, hogy vesszük G és H egy-egy (diszjunkt) példányát, és azokat teljesen összekötjük egymással.

Egy G gráfra jelöljük $edk_r(G)$-vel a páronként éldiszjunkt r pontú klikkek (teljes részgráfok) maximális számát G-ben. Adott n és m egész számokra pedig $edk_r(n, m)$-mel jelöljük $edk_r(G)$ minimumát az n pontú és m élű gráfok között.

$\lfloor x \rfloor$ vagy $[x]$ illetve $\lceil x \rceil$ az x valós szám alsó illetve felső egész része. Nagyságrendekre az $o(n^k), O(n^k)$ jelöléseket a szokásos értelemben használjuk, és a 2., 3., 4. és 7. fejezetben végig feltesszük, hogy n (a gráf pontszáma) elég nagy.

1. PARTICIÓK ÉLDISZJUNKT KLIKKEKRE

E fejezet kiindulópontja két Erdős Pál által még a 60-as években vizsgálni kezdett éldiszjunkt klikkekre vonatkozó kérdés, amik azonban Turán klasszikus gráfelméleti tételéhez kapcsolódnak.

1.1. Tétel ([M] $r = 3$, [T] $r \geq 4$). *Legyen G egy n pontú, az r pontú K_r klikket nem tartalmazó gráf. Ekkor*

$$|E(G)| \leq t_{r-1}(n),$$

ahol $t_{r-1}(n)$ az $r-1$ részes n pontú $T_{r-1}(n) = K_{r-1}(n_1, \ldots, n_{r-1})$ ($n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_{r-1} \leq n_1+1$) Turán-gráf élszáma, és egyenlőség csak a $T_{r-1}(n)$ Turán-gráfra áll fenn.

Természetesen ha a $T_2(n)$ Turán gráfot páronként éldiszjunkt klikkekre szeretnénk particionálni, akkor egyetlen lehetőségünk van, hogy $t_2(n)$ K_2-re bontjuk fel. Az első, immár klasszikusnak számító tételükben Erdős, Goodman és Pósa [EGP] azt bizonyították be, hogy ez a lehető legrosszabb eset:

1.2. Tétel [EGP]. *Minden n pontú G gráf élhalmaza particionálható legfeljebb $t_2(n)$ páronként éldiszjunkt klikkre, és ha G nem izomorf a $T_2(n)$ Turán gráffal, akkor ennél kevesebb is elegendő.*

Ez a ma már klasszikusnak számító tétel számos különböző probléma kiindulópontjává vált, attól függően, hogy milyen irányba próbáljuk meg általánosítani. Egy Erdős által sejtett nagyon szép erősítését a tételnek Pyber [Py1] bizonyította be, nevezetesen hogy elég nagy n-re minden n pontú gráf és komplementerének az élhalmaza lefedhető legfeljebb $[n^2/4] + 2$ klikkel, ami persze éles a $T_2(n)$ Turán-gráfra. Az élekkel és háromszögekkel való fedési tételek közül valószínűleg a Lehel és Tuza [LT] által bizonyított a legszebb, ami szerint minden G gráf élhalmaza lefedhető annyi éllel és háromszöggel, amennyi a G által tartalmazott legtöbb élű háromszögmentes részgráf élszáma. Ebben a dolgozatban azonban az éldiszjunkt klikkekkel való fedésekkel foglalkozunk. (A különböző fedési tételek jó áttekintése található Pyber [Py2] összefoglaló cikkében.) A problémák tárházát a különféle megkötések és súlyozások jelentik.

Az 1.2. Tétel súlyozott, erősebb változatát vetette fel sejtésként az 1976-os keszthelyi 5. Magyar Kombinatorika Kollokviumon Katona és Tarján, amit egymástól függetlenül Chung [C], valamint Kostochka és a szerző [GyK] bizonyított be, az éldiszjunktságot nem követelő fedési változatra pedig Kahn [K] adott egyszerű bizonyítást.

1.3. Tétel ([C], [GyK]). *Egy tetszőleges G gráfra $p(G)$ jelölje a $\sum |V(G_i)|$ összeg minimumát G páronként éldiszjunkt G_i klikkekre való particióira vonatkozóan (azaz a G_i részgráfok páronként éldiszjunkt klikkek, melyekre fennáll, hogy $E(G) = \cup E(G_i)$). Ekkor*

$$p(G) \leq 2t_2(n)$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha G izomorf a $T_2(n)$ Turán gráffal.

A bizonyítás a következő triviális lemma segítségével történik, amit azonban $G(N(x))$-re kell alkalmazni egy minimális fokú x pontot véve.

1.4. Lemma. *Legyen G egy tetszőleges n pontú gráf, hogy $d(x) \geq d$ fennáll G minden x pontjára. Ekkor létezik a $V(G)$ ponthalmaznak egy $n-d$ osztályú particiója, hogy minden particióosztály egy klikket feszít G-ben.* ■

(Az 1.4. Lemma egyszerűen a gráf komplementerére való megfogalmazása annak a folklór tételecskének, hogy ha egy gráfban minden pont foka legfeljebb d, akkor a gráf kromatikus száma legfeljebb $d+1$.)

Vegyük észre, hogy az 1.2. és 1.3. Tételekben az élparticiókban tetszőleges méretű klikkeket használhattunk. Hasonló tételek bizonyíthatók azonban gráfok élparticióira, ha csak a K_r és K_2 klikkeket használhatjuk. (Természetesen nem zárhatjuk ki a K_2 klikk használatát, hiszen elképzelhető, hogy a gráf nem is tartalmaz nagyobb klikket.) Nyilvánvaló, hogy ha a $T_{r-1}(n)$ Turán gráfot szeretnénk páronként éldiszjunkt klikkekre felbontani, akkor ezt csak úgy tehetjük, hogy $t_{r-1}(n)$ K_2-re bontjuk. A következő tétel azt állítja, hogy a $T_{r-1}(n)$ Turán gráf adja a legrosszabb esetet minden $r \geq 3$ esetén. Az $r=3$ esetet már Erdős, Goodman és Pósa [EGP] bebizonyították fent említett cikkükben, az $r \geq 4$ eseteket pedig Bollobás [B] bizonyította.

1.5. Tétel ([EGP] $r=3$, [B] $r \geq 4$). *Minden n pontú gráf élhalmaza felbontható legfeljebb $t_{r-1}(n)$ páronként éldiszjunkt, r vagy 2 pontú klikk uniójára, sőt ennél kevesebb is elegendő, hacsak G nem izomorf a $T_{r-1}(n)$ Turán gráffal, illetve $r=3$ esetén K_4-gyel vagy K_5-tel.*

A következő tétel hasonlóképpen élesítése az 1.5. Tételnek az $r \geq 4$ esetekben, mint ahogy az 1.3. Tétel élesítése az 1.2. Tételnek.

1.6. Tétel [GyT]. *Egy tetszőleges G gráfra $p_r(G)$ jelölje a $\sum |V(G_i)|$ összeg minimumát G páronként éldiszjunkt, r vagy 2 pontú G_i klikkekre való particióira vonatkozóan (azaz a G_i részgráfok páronként éldiszjunkt r vagy 2 pontú klikkek, hogy $E(G) = \cup E(G_i)$). Ekkor $r \geq 4$ esetén*

$$p_r(G) \leq 2t_{r-1}(n)$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha G izomorf a $T_{r-1}(n)$ Turán gráffal.

A bizonyításhoz Hajnal és Szemerédi [HSz] egy mély tételére volt szükség.

1.7. Tétel [HSz]. *Legyen G egy n pontú gráf, melyben minden pont foka legalább d. Ekkor léteznek $G_1, \ldots, G_{n-d}$ páronként pontdiszjunkt klikkek G-ben, hogy $\cup_{i=1}^{n-d} V(G_i) = V(G)$ és a G_i klikkek pontszámai legfeljebb eggyel különböznek egymástól, azaz*

$$|V(G_i)| = \left\lceil \frac{n}{n-d} \right\rceil \quad \text{vagy} \quad \left\lfloor \frac{n}{n-d} \right\rfloor$$

$i = 1, \ldots, n - d$-re.

Az $r = 3$ esetben elég különös, de minthogy az 1.5. Tételben már megjelentek a Turán gráftól különböző extrém gráfok is, talán nem olyan nagyon meglepő, hogy a várt

$$p_3(G) \leq 2t_2(n)$$

egyenlőtlenség nem áll fenn minden gráfra. Könnyen látható például, hogy

$$p_3(K_5) = 14 = 2t_2(5) + 2,$$

ami még nem olyan meglepő, de tetszőlegesen nagy példák is vannak, ugyanis

$$p_3(K_{6k+4}) = 2t_2(6k + 4) + 1.$$

Azt, hogy $p_3(K_{6k+4}) > 2t_2(6k + 4)$, elég könnyű belátni, ugyanis egyrészt K_{6k+4}-ben minden pont foka páratlan, tehát egy páronként éldiszjunkt élekre és háromszögekre való klikkparticióban legalább $3k + 2$ élt kell használni, másrészt ahhoz hogy az összpontszám legfeljebb $2t_2(n)$ legyen, legfeljebb $3k + 2$ élt használhatunk, és ha pontosan $3k + 2$ élt használunk, akkor ezek függetlenek kell hogy legyenek. De akkor egy $6k + 5$-dik pontot hozzávéve ezekhez az élekhez, a $6k + 5$ pontú teljes gráf páronként éldiszjunkt háromszögekre bontását, azaz egy $6k + 5$ pontú Steiner hármas rendszert kapnánk, ilyen pedig nincs, hiszen az élek száma nem osztható 3-mal. Az $r = 3$ esetben a következőt sikerült csak bebizonyítani:

1.8. Tétel [GyT]. *Minden n pontú G gráfra*

$$p_3(G) \leq \frac{9}{16}n^2.$$

Sejtésünk szerint azonban fennáll az

$$p_3(G) \leq 2t_2(n) + o(n^2)$$

egyenlőtlenség, sőt akár a

$$p_3(G) \leq 2t_2(n) + O(1)$$

becslést sem tartjuk kizártnak. Az első sejtést úgy is lehet fogalmazni, hogy minden n pontú és $t_2(n) + m$ élű gráf tartalmaz $\frac{2}{3}m - o(n^2)$ páronként éldiszjunkt háromszöget, de az igazi (?), még optimistább, de mindenképpen általánosabb sejtés a következő:

1.1. Sejtés. *Minden n pontú és $t_{r-1}(n) + m$ élű gráf tartalmaz $\frac{2}{r}m - o(n^2)$ páronként éldiszjunkt r pontú klikket.*

Ez a megfogalmazás tulajdonképpen már előrevetíti az 2. fejezet problémafelvetését, de egyelőre maradjunk a dekompozicióknál. Erdős felvetette egy másik súlyfüggvény vizsgálatát is. Egy tetszőleges G gráfra $p^*(G)$ jelölje a $\sum \left(|V(G_i)|-1\right)$ összeg minimumát G páronként éldiszjunkt G_i klikkekre bontásaira vonatkozóan. Lehet, hogy itt is túl optimista vagyok, de sejtésem a következő:

1.2. Sejtés. *Minden n pontú G gráfra*

$$p^*(G) \leq t_2(n).$$

Ez a sejtés csak árnyalatnyival tűnik erősebbnek, mint az 1.3. Tétel, de nem ez a helyzet. Míg a nagy klikkek súlya nem sokat változott, addig az élek súlya a felére csökkent, úgyhogy az sem volna nagy meglepetés, ha a sejtés hamisnak bizonyulna, de egyelőre ellenpélda sincsen, és persze még akkor is kérdés, hogy milyen jó felső becslés adható $p^*(G)$-re. Hogy az 1.2. Sejtés mélységét illusztráljam, hadd említsem meg annak önmagában is érdekes következő speciális esetét:

1.3. Sejtés. *Minden n pontú és $t_2(n) + m$ élű, K_4-mentes gráf tartalmaz m páronként éldiszjunkt háromszöget.*

Csak a még ennél is gyengébb következő speciális esetet sikerült bebizonyítani:

1.9. Tétel [Gy4]. *Minden n pontú, $t_2(n) + m$ élű 3-színezhető gráf tartalmaz m páronként éldiszjunkt háromszöget.*

A bizonyítás elég egyszerű, azon az észrevételen múlik, hogy elég az állítást maximális 3-színezhető, azaz teljes 3-részes gráfokra bizonyítani, ilyenekben pedig könnyű találni annyi páronként éldiszjunkt háromszöget, ahány él a két legkisebb rész között fut.

2. AZ ÉLDISZJUNKT HÁROMSZÖGEK SZÁMÁRÓL ADOTT PONTSZÁMÚ ÉS ÉLSZÁMÚ GRÁFOKBAN

Egy G gráfra jelöljük $edk_3(G)$-vel a páronként éldiszjunkt háromszögek maximális számát G-ben. Adott n és m egész számokra pedig $edk_3(n,m)$-mel jelöljük $edk_3(G)$ minimumát az n pontú és m élű gráfok között. Ezzel a jelöléssel az 1.1. Sejtés az $r = 3$ esetben azt mondta ki, hogy

$$edk_3\left(n, t_2(n) + m\right) \geq \frac{2}{3}m + o(n^2),$$

ami éles, nem javítható, ha m közel jár az $n^2/4$-hez. Itt viszont most azt vizsgáljuk meg, hogy mikor mondható ennél sokkal jobb, egészen pontosan mikor mondható ki az elméletileg lehetséges legjobb. Ezt a kérdést Erdős [E7] már a 60-as években felvetette, de először nézzük, mi is az az elméletileg lehetséges legjobb. Vegyük észre, hogy ha a $T_2(n)$ Turán gráfhoz hozzávesszünk m élet, akkor természetesen minden háromszög legalább egy élet kell, hogy tartalmazzon ebből az m élből, tehát

$$edk_3\big(n, t_2(n) + m\big) \le m.$$

Másrészt világos, hogy ha az m növekszik, akkor egy ilyen gráfban egyre nehezebb m páronként éldiszjunkt háromszöget találni. A Turán tétel ezen a nyelven azt mondja ki, hogy

$$edk_3\big(n, t_2(n) + 1\big) = 1.$$

Természetes tehát az Erdős [E7] által felvetett probléma, hogy határozzuk meg m maximumát, amire még igaz, hogy

$$edk_3\big(n, t_2(n) + m\big) = m.$$

Abban, hogy ez a probléma több, mint húsz évig megoldatlan maradt, valószínűleg az a meglepő tény is közrejátszott, hogy mint látni fogjuk, a maximális m-nek még a nagyságrendje is különböző páros és páratlan n-re amit a Sauer által felvetett sejtés nem vett figyelembe, így bár annak legalábbis a nagyságrendje jó volt az egyik esetben, a másik esetben hamis volt még a nagyságrendre vonatkozóan is.

Még ugyanabban a cikkében felvetette Erdős [E7] azt a sejtést, hogy ha $m = cn$, akkor létezik olyan $f(c)$ függvény, hogy

$$edk_3\big(n, t_2(n) + m\big) \ge m - f(c).$$

Mint kiderült, ezek a problémák nagyon közel állnak egymáshoz. Valójában Erdős sejtésének a következő általánosítását sikerült bebizonyítani, ami alapvető fontosságúnak bizonyult a probléma megoldásában is.

2.1. Tétel [Gy1]. *Legyen G egy n pontú és $t_2(n) + m$ élű gráf, ahol $m = o(n^2)$. Ekkor G tartalmaz*

$$m - O\left(\frac{m^2}{n^2}\right) = \big(1 - o(1)\big)m$$

éldiszjunkt háromszöget, azaz $m = o(n^2)$ esetén

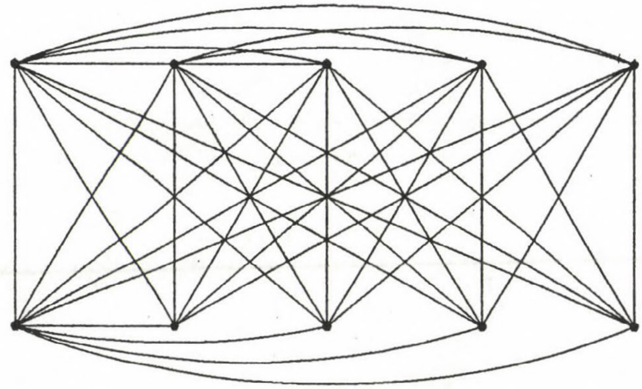
$$edk_3\big(n, t_2(n) + m\big) = m - O\left(\frac{m^2}{n^2}\right) = \big(1 - o(1)\big)m.$$

Megjegyzés. A gyengébb

$$edk_3\big(n, t_2(n) + m\big) = \big(1 - o(1)\big)m$$

becslés Lovász és Simonovits [LS] egy tételéből is következik, de például Erdős sejtésének a bizonyításához az erősebb becslésre van szükség.

Ebből azonnal következik Erdős sejtése a következő formában:



2.1. Ábra

2.2. Tétel [Gy1].
$$edk_3\big(n, t_2(n) + m\big) \geq m - c_0 c^2,$$
ha $m \leq cn$, ahol c_0 egy abszolút konstans.

Megjegyezzük, hogy a c_0 konstans értéke pontosan kiszámolható, és 1-nél nem több.

Az 2.1. Tételt használva a következő választ sikerült adni Erdős problémájára:

2.3. Tétel [Gy1]. *Legyen G egy n pontú és $t_2(n) + m$ élű gráf, hogy*

$$m \leq 2n - 10, \quad \text{ha } n \text{ páratlan}$$

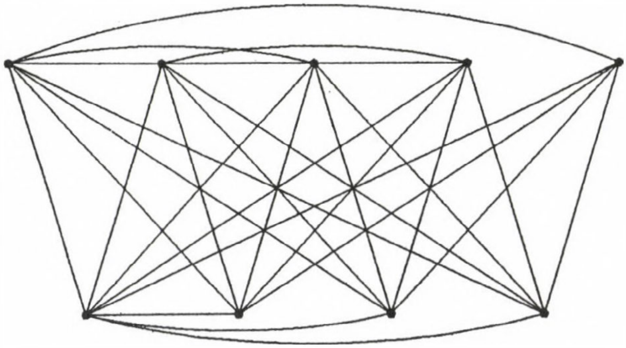
és

$$m \leq 1.5n - 5, \quad \text{ha } n \text{ páros.}$$

Ekkor a G gráf tartalmaz m páronként éldiszjunkt háromszöget, ha n eléggé nagy. A 2.1. és 2.2. Példák mutatják, hogy ezek a korlátok m-re élesek.

2.1. Példa. $n = 2k$. Tekintsük a $G = T_2(n-3) + K_3$ gráfot, amit úgy is megkaphatunk, hogy a veszünk a $T_2(n)$ Turán gráf V_1 színosztályában egy, V_2 színosztályában pedig két pontot (x_1, x_2), és ezt a három pontot minden más ponttal összekötjük.($n = 10$-re lásd 2.1. Ábra.) Ekkor a kapott G gráfnak n pontja és $t_2(n) + 1.5n - 4$ éle van, és nem tartalmaz $1.5n - 4$ éldiszjunkt háromszöget. Ugyanis természetesen a $G(V_1)$ és $G(V_2)$-beli élekhez különböző azokat tartalmazó háromszögeket kell találnunk, és ha a $k-1$ $G(V_1)$-beli élt tartalmazó háromszög éleit elhagyjuk, akkor $k-1$ V_2-beli pont foka csökken kettővel, így x_1 és x_2 valamelyikéé is, pl. x_1-é, és akkor nem tudunk éldiszjunkt háromszögeket találni az x_1-ből V_2-be vezető élek lefedésére.

2.2. Példa. $n = 2k+1$. Tekintsük a $T_2(n)$ Turán gráfot k elemű V_1 és $k+1$ elemű V_2 színosztályokkal. Vegyünk egy pontot V_1-ből és kössük össze V_1 összes pontjával is. Aztán vegyünk három pontot V_2-ben, legyenek ezek x_1, x_2, x_3, és kössük össze őket egymással és $k-3$ (egy kivételével az összes) további V_2-beli ponttal. (Ezek a $k-3$ elemű halmazok különbözők is lehetnek az x_1, x_2, x_3 pontokra.) ($n = 9$-re lásd 2.2. Ábra.) Ekkor a kapott G gráfnak n pontja és $t_2(n) + 2n - 9$ éle van, és nem tartalmaz $2n-9$ páronként éldiszjunkt háromszöget. Ugyanis természetesen a $G(V_1)$ és $G(V_2)$-beli élekhez különböző azokat tartalmazó háromszögeket kell megint találnunk, és ha a $k-1$ $G(V_1)$-beli élt tartalmazó háromszög éleit elhagyjuk, akkor $k-1$ V_2-beli pont foka csökken kettővel, így x_1, x_2 és x_3 valamelyikéé is, pl. x_1-é, és akkor nem tudunk éldiszjunkt háromszöget találni az x_1-ből V_2-be vezető élek lefedésére.



2.2. Ábra

Megjegyzés. A 2.3. Tétel csak a fenti példákbeli gráfokra éles, ha n elég nagy. Ugyanakkor vegyük észre, hogy páros n-re az extremális gráf egyértelmű, páratlan n-re viszont három különböző, bár hasonló szerkezetű extremális gráf is van.

Megjegyzések.

A helyzet hasonló, ha $m = o(n^2)$, $m \geq 2n$. Akárcsak a fenti tétel bizonyításában, ha lefedtünk nem monokromatikus éldiszjunkt háromszögekkel a $v_1, \ldots, v_{\lceil \frac{2m}{n} \rceil}$ pontokhoz illeszkedő monokromatikus élek közül a lehető legtöbbet, akkor utána a többi monokromatikus élet már le tudjuk fedni éldiszjunkt nem monokromatikus háromszögekkel. Ezzel összhangban be lehet bizonyítani, hogy adott n pontszám és $t_2(n) + m$ $\left(m = o(n^2)\right)$ élszám esetén $edk_3(G)$ lényegében olyan G gráfra minimális, amit a $T_2(n)$ Turán gráfból úgy kaphatunk, hogy mindkét színosztály körülbelül $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ pontját lényegében minden ponttal összekötünk, az esetleges további éleket mindegy, hogy hová adjuk hozzá az így kapott gráfhoz. Sajnos, úgy tűnik, hogy ha m n^2 nagyságrendű, akkor a helyzet sokkal bonyolultabb.

3. AZ ÉLDISZJUNKT $r \geq 4$ PONTÚ KLIKKEK SZÁMÁRÓL ADOTT PONTSZÁMÚ ÉS ÉLSZÁMÚ GRÁFOKBAN

Ebben a részben az előző fejezet eredményeinek háromszögek helyett r pontú klikkekre röviden r-klikkekre vonatkozó általánosításait tekintjük át. Egy G gráfra jelöljük $edk_r(G)$-vel a páronként éldiszjunkt r pontú klikkek maximális számát G-ben. Adott n és m egész számokra pedig jelöljük $edk_r(n, m)$-mel $edk_r(G)$ minimumát az n pontú és m élű gráfok között. Természetesen most is igaz, hogy ha a $T_{r-1}(n)$ Turán gráfhoz hozzáveszünk m élet, akkor minden r-klikk legalább egy élet kell,hogy tartalmazzon ebből az m élből, tehát

$$edk_r\big(n, t_{r-1}(n) + m\big) \leq m.$$

Természetesen vetődik fel tehát ugyanaz a probléma, mint háromszögekre, hogy határozzuk meg m maximumát, amire még igaz, hogy

$$edk_r\big(n, t_{r-1}(n) + m\big) = m.$$

Ha m n^2 nagyságrendű, akkor ugyanazok a nehézségek lépnek fel, mint háromszögek esetében, de még fokozottabb mértékben, minthogy ilyen élszám mellett a legnagyobb élszámú $r - 1$-színezhető részgráf méretéről még kevésbé vannak pontos eredmények, mint a legnagyobb élszámú páros gráféról. Ebben a részben $edk_r\big(n, t_{r-1}(n) + m\big)$-t vizsgáljuk az $r \geq 4$, $m = o(n^2)$ esetben. Bár az eredmények hasonlóak a háromszögekre kapott eredményekhez, a bizonyítások lényegesen bonyolultabbak, nem triviális általánosításai a háromszögekről szóló tételek bizonyításainak. A következő tételeket sikerült bebizonyítani:

3.1. Tétel [Gy3]. *Legyen G egy n pontú és $t_{r-1}(n) + m$, $r \geq 4$ élű gráf, ahol $m = o(n^2)$. Ekkor G tartalmaz*

$$m - O\left(\frac{m^2}{n^2}\right) = \big(1 - o(1)\big)m$$

éldiszjunkt r-klikket, azaz $m = o(n^2)$ esetén

$$edk_r\big(n, t_{r-1}(n) + m\big) = m - O\left(\frac{m^2}{n^2}\right) = \big(1 - o(1)\big)m.$$

Megjegyzés. A gyengébb $edk_r\big(n, t_{r-1}(n) + m\big) = \big(1 - o(1)\big)m$ becslés Lovász és Simonovits [LS] tételéből is következik, de itt többet bizonyítottunk, minthogy a bizonyításhoz erre a többletre is szükség volt.

A 3.1. Tételből azonnal következik a 2.2. Tétel megfelelő általánosítása:

3.2. Tétel [Gy3].
$$edk_r\big(n, t_{r-1}(n) + m\big) \geq m - c_0c^2,$$
ha $m \leq cn$, ahol c_0 egy abszolút konstans.

Ugyancsak a 3.1. Tételt használva lehet bebizonyítani a 2.3. Tétel r-klikkekre való általánosítását. Érdekes, hogy a bizonyítás nehezebb, mint háromszögekre, dacára, hogy itt már nincsenek különböző nagyságrendű extrém gráfok különböző esetekben. Utóbbi azon múlik, hogy háromszögekre két egyforma méretű színosztály esetén van erősebb korlát az élszámra, és $r \geq 4$ esetén mindig van két egyforma színosztály a $T_{r-1}(n)$ Turán gráfban. A 2.3. Tételt a következőképpen sikerült általánosítani:

3.3. Tétel [Gy3]. *Legyen G egy n pontú és $t_{r-1}(n) + m$, $(r \geq 4)$ élű gráf, hogy*
$$m \leq 3\left\lfloor\frac{n+1}{r-1}\right\rfloor - 5.$$
Ekkor a G gráf tartalmaz m páronként éldiszjunkt r-klikket, ha n eléggé nagy. A 3.1. Példa mutatja, hogy ezek a korlátok m-re élesek.

3.1. Példa. Tekintsük a $T_{r-1}(n)$ Turán gráf két $\lfloor\frac{n+1}{r-1}\rfloor$ pontú színosztályát, V_i-t és V_j-t, és adjunk hozzá ehhez a Turán gráfhoz $3\lfloor\frac{n+1}{r-1}\rfloor - 4$ élet úgy, hogy V_i két és V_j egy pontját kössük össze a gráf minden pontjával. Belátjuk, hogy a kapott n pontú $t_{r-1}(n)+3\lfloor\frac{n+1}{r-1}\rfloor - 4$ élű G gráf nem tartalmaz $3\lfloor\frac{n+1}{r-1}\rfloor - 4$ éldiszjunkt r-klikket. Ha a $G(V_j)$-beli $\lfloor\frac{n+1}{r-1}\rfloor - 1$ élt lefedjük $\lfloor\frac{n+1}{r-1}\rfloor - 1$ éldiszjunkt r-klikkel elhagyva ezzel $\left(\left\lfloor\frac{n+1}{r-1}\right\rfloor - 1\right)\binom{r}{2}$ élt egy kivétellel minden V_i-beli pontnak csak $\left\lfloor\frac{n+1}{r-1}\right\rfloor - 2$ V_j-beli szomszédja marad. Mivel két V_i-beli pontnak is $\left\lfloor\frac{n+1}{r-1}\right\rfloor - 1$ a $G(V_i)$-beli foka, így nem találunk $2\left\lfloor\frac{n+1}{r-1}\right\rfloor - 3$ éldiszjunkt r-klikket, ami lefedné az ehhez a két ponthoz illeszkedő $2\left\lfloor\frac{n+1}{r-1}\right\rfloor - 3$ élt. Tehát a G gráf valóban nem tartalmaz $3\left\lfloor\frac{n+1}{r-1}\right\rfloor - 4$ éldiszjunkt r-klikket.

Valójában a 3.1. Tétel bizonyításában a következő állítást is bebizonyítottuk, amit a 3.3. Tétel bizonyításában használtunk fel.

3.4. Tétel [Gy3]. *Legyen G egy n pontú és $t_{r-1}(n) + m$ élű gráf, ahol $m = o(n^2)$. Ekkor vagy G tartalmaz m éldiszjunkt r-klikket, vagy létezik $V(G)$-nek egy $\{V_1, \ldots, V_{r-1}\}$ $(r-1)$-színezése, hogy a kétszínű élek száma $t_{r-1}(n) + O(1)\frac{m^2}{n^2}$, és így $|V_i| = \frac{n}{r-1} + O(1)\frac{m}{n}$ $i = 1, \ldots, r-1$-re.*

A következő lemma alapvető fontosságú a 3.3. Tétel bizonyításában:

3.2. Lemma. *Legyen H egy s pontú $(r-1)$-részes gráf $W_1, \ldots, W_{r-1}$ színosztályokkal, hogy $|W_1| \leq |W_2| = |W_3| = \ldots = |W_{r-1}|$. Tegyük fel, hogy*

$$(3.11) \qquad \left|N_H(w) \cap W_j\right| \geq \left(1 - \frac{1}{3r}\right)|W_j| \quad j \geq 2, \quad w \in W_i, \quad i \neq j-re$$

és hogy

$$(3.12) \qquad \left|N_H(w) \cap W_1\right| \geq \left(1 - \frac{1}{3r}\right)|W_1| \quad w \notin W_1 - re, \quad ha \quad |W_1| \geq \frac{1}{2}|W_2|.$$

Ekkor létezik $|W_1|$ pontdiszjunkt r-klikk H-ban (amik persze lefedik W_1-t), ha s elég nagy.

4. HÁNY ÉL ELHAGYÁSÁVAL TEHETŐ PÁROSSÁ EGY GRÁF?

Mindenekelőtt hadd jegyezzük meg, hogy a címben feltett kérdés valójában több kérdést takar, attól függően, hogy milyen gráfokat vizsgálunk, és számos rokon természetű kérdés is feltehető, arról nem is beszélve, hogy ugyanahhoz a problémához különböző területekről közeledve különböző megfogalmazásokat kapunk. Szóval a problémakör gyökerei meglehetősen szerteágazóak, amikből a teljesség igényének még a látszatát is elkerülve most hadd említsek csak néhányat.

Ha semmilyen megkötést nem teszünk a gráfra, akkor Erdős [E1] klasszikus tétele a válasz, nevezetesen, hogy tetszőleges G gráfra

$$(4.1) \qquad D(G) \leq \frac{1}{2}e(G)$$

ahol $D(G)$ azt a minimális számot jelöli, ahány él elhagyásával G párossá tehető.

Általában bizonyos kicsi hibatagtól eltekintve a fenti egyenlőtlenség éles is, például a teljes gráfra, vagy fix élvalószínűségű véletlen gráfra. (Itt most nagyvonalúan nem foglalkozunk ezzel a hibataggal, de annyit minimum meg kell, hogy jegyezzek, hogy a különböző gráfokra csak ennek a hibatagnak a becslésével már külön kis irodalom foglalkozik.) Jelen (és számos korábbi) cikk megközelítésében az a kérdés, hogy milyen pluszfeltételek fennállása esetén lehet (4.1) helyett lényegesen jobbat mondani.

Egy páros gráf nem tartalmaz háromszöget, tehát ha egy gráfot párossá akarunk tenni, akkor minden háromszögéből el kell hagyni legalább egy élet. Vajon segít-e az, ha eleve tudjuk a gráfról, hogy háromszögmentes?A válasz nem egyszerű igen vagy nem. Ismert (lásd pl. [E2], [E3], [S1], [EFPS]), hogy minden n pontú háromszögmentes, közel ext (n, K_3) élt tartalmazó gráf párossá tehető kevés él elhagyásával. (Precízen a „közel" és a „kevés" $o(n^2)$-t jelent.) Ha a pontok számához viszonyítunk, akkor az általános esetben a teljes gráf viselkedik a legrosszabbul, lényegében $n^2/4$ élet el kell hagynunk, hogy párossá tegyük. Ugyanakkor egy n pontú háromszögmentes gráf legfeljebb $n^2/4$ élt tartalmaz (Turán-tétel), és így (4.1) alapján $n^2/8$ él elhagyásával párossá tehető. Erdős immár klasszikusnak számító sejtése szerint azonban ennél sokkal jobb mondható:

4.1. Sejtés ([E7], [E11]). *Minden n pontú háromszögmentes G gráfra $D(G) \leq n^2/25$, azaz párossá tehető $n^2/25$ él elhagyásával.*

A fenti sejtés tovább már nem javítható, a következő gráf az extremális: Tegyünk $n/5$ pontot a $V_1, \dots, V_5$ ponthalmazokba, és kössük össze V_i pontjait V_{i+1} pontjaival ($i = 1, \dots, 5, V_6 = V_1$). A kapott $C_5(n/5, \dots, n/5)$ gráf háromszögmentes, és

$$D\big(C_5(n/5, \dots, n/5)\big) = n^2/25.$$

Természetesen hasonló az extrém gráf akkor is, ha n nem osztható 5-tel. A fentihez hasonlóan definiáljuk a $C_5(n_1, \dots, n_5)$ gráfot $n_1, \dots, n_5$ pontú $V_1, \dots, V_5$ ponthalmazokkal (ezeket a gráfokat fogjuk röviden ötszögszerűnek nevezni), és $n = n_1 + \dots + n_5$-re a kapott gráf extremális, ha az n_i-k legfeljebb eggyel különböznek egymástól.

Ez a sejtés igaz, ha

$$e(G_n) \geq \frac{n^2}{5}$$

(lásd pl. [EFPS]), általában pedig Erdős, Faudree, Pach és Spencer a következő becslést bizonyították be:

4.1. Tétel [EFPS]. *Tetszőleges n pontú háromszögmentes G gráfra*

$$D(G) \leq \frac{n^2}{18 + \delta},$$

ahol δ egy kiszámolható konstans.

Valójában Erdős, Faudree, Pach és Spencer a következő tételt bizonyították be:

4.2. Tétel [EFPS]. *Tetszőleges n pontú m élű háromszögmentes G gráfra*

$$D(G) \leq \max\left\{\frac{m}{2} - \frac{2m(2m^2 - n^3)}{n^2(n^2 - 2m)}, m - \frac{4m^2}{n^2}\right\} \tag{4.2}$$

Ha n-t rögzítjük, és csak m változik, akkor (4.2) jobboldala csökken az $[n^2/8, n^2/2]$ intervallumban, és éppen $n^2/25$, amikor $m = n^2/5$, tehát (4.2)-ből következik, hogy ha egy n pontú háromszögmentes G gráfra

$$e(G) \geq n^2/5, \tag{4.3}$$

akkor $D(G) \leq n^2/25$. Természetesen (4.1)-ből következik a sejtés, ha $e(G) \leq 2n^2/25$, de a sejtés még mindig nyitott, ha

$$\frac{2n^2}{25} < e(G) < \frac{n^2}{5}.$$

Már az eddigi megközelítésekből is látszik, hogy fontosak az olyan becslések $D(G)$-re, amiben G élszáma is szerepel. Erdős először azt gondolta, hogy minden háromszögmentes gráfra $D(G) \leq e(G)/5$. Ez éles volna például a $C_5(n/5, \ldots, n/5)$ gráfra, azonban később maga Erdős cáfolta ezt [E4]-ben bebizonyítva, hogy létezik háromszögmentes gráfoknak egy H_k végtelen sorozata, hogy

$$D(H_k) \geq \left(\frac{1}{2} - o(1)\right) e(H_k).$$

Ezeknek a gráfoknak azonban csak $o(n^2)$ élük van, így természetes volna úgy megpróbálni menteni a sejtést, hogy egy $o(n^2)$-es hibatagot megengedünk, ami azt is jelenti, hogy csak olyan gráfokat vizsgálunk, hogy valamilyen fix c konstansra a gráf legalább cn^2 élt tartalmaz.

Sajnos ez a sejtés sem igaz, ugyanis Erdős fenti „véletlen" konstrukcióját használva a következő tétel bizonyítható:

4.3. Tétel [EGyS]. *Minden $\varepsilon > 0$-ra létezik egy $c = c_\varepsilon > 0$ konstans, hogy végtelen sok n-re létezik egy G_n háromszögmentes gráf, hogy $e(G_n) > c_\varepsilon n^2$, és*

$$D(G_n) > (1/2 - \varepsilon)\, e(G_n).$$

Ez az állítás természetesen éles (4.1) értelmében.

A 4.3. Tétel bizonyításához $C_5(n_1, \ldots, n_5)$ mintájára $H(n_1, \ldots, n_k)$ gráfokat tekintünk, azaz veszünk egy k pontú H gráfot, melynek pontjait helyettesítjük $n_1, \ldots, n_k$ független ponttal (ezeket hívjuk a kapott gráf „osztályainak"), és két különböző osztálybeli pontot pedig pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a halmazoknak megfelelő H-beli pontok össze voltak kötve. A 4.9. Tétel szerint ha egy ilyen gráfot minimális számú él elhagyásával akarunk párossá tenni, akkor mindig van egy olyan élelhagyás, hogy két pont közötti él elhagyása vagy nem elhagyása csak attól függ, hogy a két pont melyik osztályban van.

4.1. Definíció (Kanonikus élelhagyás). *Adott k pontú H gráfra és $n_1, \ldots, n_k$ egészekre legyen $G = H[n_1, \ldots, n_k]$. Egy élelhagyást kanonikusnak nevezünk, ha G bármely két pontosztályára vagy az összes őket összekötő élt elhagyjuk, vagy egyet sem.*

Más szóval, a kapott G' gráf $H'[n_1, \ldots, n_k]$ alakú, ahol H' a H gráf egy részgráfja. Abból, hogy a minimális élelhagyások között van kanonikus, egyebek mellett az is következik, hogy $D(G)$ meghatározásához csak k-tól függő konstans sok esetet kell megvizsgálni, az esetek száma nem tart a pontszámokkal végtelenhez.

Az is igaz, hogy bármely fix 3-kromatikus L gráfra (speciálisan a háromszögre is) egy n pontú L-t részgráfként nem tartalmazó, de viszonylag sok élű G gráfot kevesebb él elhagyásával párossá tehetünk, mint egy ugyanennyi pontú és legalább ennyi élű ötszögszerű gráfot.

Egy adott p-re tekinthetjük az ötszögszerű $H = C_5[n_1, \dots, n_5]$ gráfot $n_3 = n_4 = n_5 = \sqrt{p}$-vel, ahol a másik két osztály nagyobb. Ekkor a később kimondandó és bizonyítandó 4.9. Tétel szerint legalább p élt el kell hagynunk H párossá tételéhez.

4.4. Tétel [EGyS]. *Minden háromszögmentes n pontú legalább $n^2/5$ élű G gráfhoz található egy n pontú ötszögszerű $H = C_5[n_1, \dots, n_5]$ gráf, hogy*

$$e(G) \le e(H), \tag{4.4}$$

és

$$D(G) \le D(H). \tag{4.5}$$

Mohó algoritmus. Vegyünk G-ben egy xy élt, amire $d(x) + d(y)$ maximális, és legyen $A_1 = N(x)$, $A_2 = N(y)$, $C = V - A_1 - A_2$. Osszuk a C-beli pontokat sorban, mohón C_1-be és C_2-be úgy, hogy a monokromatikus élek száma minimális legyen. Az ezen eljárás során kapott színezésben a monokromatikus élek számát jelöljük $D'(G)$-vel. (Vegyük észre, hogy ez függhet az xy él választásától és C elemeinek sorrendjétől.)

Definíció szerint $D'(G) \ge D(G)$. Ezt figyelembe véve (4.5) helyett az erősebb

$$D'(G) \le D(H) \tag{4.6}$$

egyenlőtlenséget bizonyítjuk.

4.5. Tétel [EGyS]. *Legyen G egy n pontú háromszögmentes gráf, hogy*

$$e(G) > \frac{n^2}{5},$$

és alkalmazzuk a fent leírt mohó algoritmust G-re. Jelölje c a C-beli pontok cd pedig a monokromatikus élek számát, azaz

$$D'(G) := cd.$$

Ekkor létezik egy n pontú ötszögszerű $H = C_5[n_1, \dots, n_5]$ gráf, hogy $n_3 = n_4 = n_5 = \sqrt{cd}$ $e(G) \le e(H)$.

A 4.5. Tételből következik a 4.4. Tétel, ugyanis bár kissé hosszadalmas számolással, de minden különösebb ötlet nélkül belátható, hogy fix pontszám esetén $e = e(H)$ növekedtével $\min\limits_{e(H) \ge e} D(H)$ csökken.

A következő tétel a 4.4. és 4.5. Tétel stabilitását mutatja. Azt állítja, hogy vagy van egy ötszögszerű H gráf, aminek ugyanannyi pontja és éle van, mint G-nek és lényegesen nehezebben tehető párossá, mint G, vagy pedig G nagyon hasonlít egy ötszögszerű gráfra abban az értelemben, hogy kevés él elhagyásával illetve hozzávételével egy ötszögszerű gráf kapható belőle.

4.6. Tétel [EGyS]. *Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $\delta > 0$, hogy ha a 4.5. Tételben*

$$e(H) - \delta n^2 \leq e(G),$$

akkor G-bΩl legfeljebb εn^2 él elhagyásával és hozzávételével egy ötszögszerű gráfot kaphatunk.

Hasonló szellemben született a következő tétel.

4.7. Tétel [EGyS]. *Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $\delta > 0$, hogy ha G egy n pontú legfeljebb δn^3 háromszöget tartalmazó gráf, melyre*

$$e(G) > \frac{n^2}{5} - \delta n^2,$$

akkor valamely $H \sim H[m, m, \mu, \mu, \mu]$, $(\mu \leq m)$ gráfra

$$e(G) \leq e(H).$$

Ha ráadásul

$$e(H) - \delta n^2 \leq e(G),$$

akkor G-ből ötszögszerű gráfot kaphatunk legfeljebb εn^2 él elhagyásával.

Természetes a kérdés, mi történik, ha háromszög helyett egy tetszőleges L 3-kromatikus gráfot zárunk ki. A válasz (és bár mély tételeket felhasználva, de tulajdonképpen a bizonyítás is) egyszerű: a tételek érvényben maradnak.

4.8. Tétel [EGyS]. *Legyen L egy tetszőleges, de rögzített 3-kromatikus gráf. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $\delta > 0$, hogy ha G egy n pontú gráf, melyre $L \not\subseteq G$ és*

$$e(G) > \frac{n^2}{5} - \delta n^2,$$

és a fenti mohó algoritmust G-re alkalmazva egy C osztályt kapunk c ponttal, amik cd monokromatikus élt fognak le, azaz

$$D'(G) := cd,$$

akkor létezik egy n pontú $H \sim H\left[\sqrt{cd}, \sqrt{cd}, \sqrt{cd}, u, u\right]$ gráf, hogy

$$e(G) \leq e(H).$$

Ha ráadásul

$$e(H) - \delta n^2 \leq e(G) \leq e(H),$$

akkor G-ből legfeljebb εn^2 él elhagyásával egy ötszögszerű gráfot kaphatunk.

A bizonyítások sorát a 4.3. Tételével kezdjük, ami abból következik, hogy ha egy rögzített p egészre egy $G = L[n_1, \ldots, n_k]$ gráfot a lehető legkevesebb él elhagyásával p-kromatikussá szeretnénk tenni, akkor ez mindig megtehető kanonikus élelhagyással.

4.9. Tétel [EGyS]. *Legyen*

$$G = H[n_1, \ldots, n_k].$$

Ekkor létezik egy $D_p(G)$ élt tartalmazó kanonikus élelhagyás, hogy a G-ből visszamaradó gráf p-kromatikus.

4.1. Következmény. *Tegyük fel, hogy valamely rögzített p-re és egy k pontú H gráfra $D_p(H) > \alpha k^2$. Legyen G_n egy gráfsorozat, hogy G_n n pontú, és $G_n = H[n_1, \ldots, n_k]$ bizonyos $n_i = \frac{n}{k} + o(n)$ egészekre. Ekkor $D_p(G_n) > \alpha n^2 - o(n^2)$. Ráadásul ha $k \mid n$ és $n_i = n/k$, akkor*

$$\frac{D_p(G_n)}{n^2} \geq \frac{D_p(H_k)}{k^2}. \tag{4.7}$$

4.2. Következmény. *Egy ötszögszerű $H[n_1, \ldots, n_5]$ gráfra*

$$D\big(H[n_1, \ldots, n_5]\big) = \min_i n_i n_{i+1}.$$

Megjegyzések. 1. Természetesen adódik a kérdés, hogy vajon minden optimális élelhagyás kanonikus-e. A válasz nem, például $H = C_5$, $a, b \leq c, d$ esetén $H[a, b, c, d, b]$-ből maximális páros részgráfot kaphatunk, ha U_1-t ketté vágjuk U'-re és U''-re, és elhagyjuk az összes U' és U_2 illetve U'' és U_5 közötti élt.

2. Még egy fontos megjegyzést kell tenni. Adott összpontszám esetén kérdés, hogy hogyan kell az $n_1, \ldots, n_5$ számokat választani a $C_5[n_1, \ldots, n_5]$ gráf konstrukciójában az $n_i n_{i+1} \geq M$ feltétel mellett, hogy a lehető legnagyobb élszámot kapjuk. Az extrém ponteloszlás néha aszimptotikusan egyértelmű, néha nem. Például a $C_5[a, a, c, c, a]$ gráf $(3a+2c = n)$ $a \leq c$ esetén gyakran optimális, de ebben az esetben a hasonlóképpen optimális gráfok száma végtelenhez tart, ahogy n tart végtelenhez, mivel ha a $C_5[n_1, n_2, n_3, n_4, n_5]$ gráf helyett a $C_5[n_1, n_2+1, n_3, n_4-1, n_5]$ gráfot vesszük, akkor az élszám $(n_1 - n_5)$-tel változik, tehát konstans, ha $n_1 = n_5$.

5. HÁNY 5 HOSSZÚSÁGÚ KÖRT TARTALMAZHAT EGY HÁROMSZÖGMENTES GRÁF

Erdős egy régi sejtése egy más mérték szerint állítja, hogy az előző részben látott „felfújt ötszög" a legkevésbé páros háromszögmentes gráf. Nevezetesen, hogy ez a gráf tartalmazza a legtöbb 5 hosszúságú C_5 kört, amit a jövőben röviden ötszögnek nevezünk.

5.1. Sejtés [E11]. *Minden n pontú háromszögmentes gráfban az 5 hosszúságú C_5 körök száma legfeljebb $(n/5)^5$.*

A fenti becslés tovább már nem javítható, a következő gráf az extremális: Tegyünk $n/5$ pontot a $V_1, \dots, V_5$ ponthalmazokba, és kössük össze V_i pontjait V_{i+1} pontjaival ($i = 1, \dots, 5, V_6 = V_1$). A kapott $C_5(n/5, \dots, n/5)$ gráf háromszögmentes, és könnyen ellenőrizhető, hogy benne az 5 hosszúságú C_5 körök száma $(n/5)^5$. (Hasonló az extrém gráf akkor is, ha n nem osztható 5-tel.)

Érdekes, hogy ezzel a problémával kapcsolatban hosszú éveken át nem történt előrehaladás, míg 1989-ben sikerült az első lényeges lépést megtenni, amikor is a kívánt szám 1.03-szorosát sikerült bebizonyítani. A korábbiakhoz hasonlóan, jelölje $C_5(G)$ a G-beli ötszögek számát.

5.1. Tétel [Gy2]. *Minden n pontú G háromszögmentes gráfra*

$$C_5(G) \le c\left(\frac{n+1}{5}\right)^5,$$

ahol

$$c = \frac{3^3 \cdot 5^4}{2^{14}} = \frac{16.875}{16.384} < 1.03.$$

A tétel bizonyítása a következő lemmán alapszik.

5.1. Lemma [Gy2]. *Legyen $G = (V, E)$ egy n pontú, e élű háromszögmentes gráf, és jelölje M a fokszámok négyzetösszegét, azaz*

$$M = \sum_{v \in V(G)} (d(v))^2.$$

Ekkor a v-t tartalmazΣ ötszögek száma minden $v \in V(G)$ pontra legfeljebb

$$\frac{(d(v))^2}{4}\left(e - \sum_{uv \in E} d(u)\right),$$

és G tartalmaz egy v pontot, amire ez a felső becslés legfeljebb

$$\frac{M}{4n}\left(e - \frac{M}{n}\right).$$

Megjegyzés. Ha $e \ge n^2/5$ akkor a bizonyításból az következik, hogy van olyan pont, ami legfeljebb $(n/5)^4$ ötszögben van benne, és ha G egy olyan gráf, ami a maximális számú ötszöget tartalmazza, akkor a szimmetrizáció módszerével bizonyítható, hogy a többi pontra is lényegében ugyanez a helyzet, tehát az 5.1. Sejtés aszimptotikusan helyes ebben az esetben. Az $e < n^2/5$ eset azonban változatlanul nyitott.

IRODALOM

[B1] B. Bollobás, *Extremal Graph Theory,* Academic Press, 1978.

[B2] B. Bollobás, On complete subgraphs of different orders, *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.,* **79** (1976), 19–24.

[C] F. R. K. Chung, On the decompositions of graphs, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods,* **2** (1981), 1–12.

[D] G. A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc.,* **2** (1952), 69–81.

[E1] P. Erdős, Személyes közlés, folklór.

[E2] P. Erdős: Some recent results on extremal problems in graph theory (Results), *Theory of Graphs,* International symposium, Rome, (1966), Gordon and Breach, New York and Dunod, Paris, 1967, pp. 118–123, MR 37, #2634.

[E3] P. Erdős: On some new inequalities concerning extremal properties of graphs, *Theory of Graphs,* Proc. Coll. Tihany, Hungary (ed. P. Erdős and G. Katona) Acad. Press. N. Y. 1968, pp. 77–81.

[E4] Erdős P.:Gráfok páros körüljárású részgráfjairól, *Matematikai Lapok,* **18** (1967) 283–288.

[E5] P. Erdős: On some extremal problems on r-graphs, *Discrete Math.* **1** (1971) 1–6.

[E6] P. Erdős: On extremal problems of graphs and generalized graphs, *Israel J. of Mathematics,* Vol **2/3** (1964), pp. 183–190. (Reprinted in Art of Counting, MIT PRESS, 1973)

[E7] P. Erdős, Some unsolved problems in graph theory and combinatorial analysis, *Combinatorial Mathematics and Its Applications* (Proc. Conf. Oxford, 1969.), Academic Press, (1971), 97–109.

[E8] P. Erdős, Two problems in extremal graph theory, *Graphs and Combinatorics,* **2** (1986) 189–190.

[E9] P. Erdős, On the number of complete subgraphs contained in certain graphs, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.,* **7** (1962) 459–464.

[E10] P. Erdős, On the number of complete subgraphs and circuits contained in graphs, *Casopis Pest. Mat.,* **94** (1969) 290–296.

[E11] P. Erdős, On some unsolved problems in graph theory and combinatorial analysis and combinatorial number theory, *Graph Theory and Combinatorics* (Proc. Cambridge Combinatorial Conf., 1983.), Academic Press, 1–17.

[EFPS] P. Erdős, R. J. Faudree J. Pach, Joel Spencer: How to make a graph bipartite, *J. Combinatorial Th. B,* **45** (1988) 86–98.

[EGP] P. Erdős, A. Goodman and L. Pósa, The representation of graphs by set intersections, *Canad. J. Math.,* **18** (1966), 106–112.

[EGyS] P. Erdős, E. Győri, M. Simonovits, How many edges should be deleted to make a triangle-free graph bipartite, *Sets, Graphs and Numbers* (Proc. of the Coll. ded. to the 60th birthday of A. Hajnal and V. T. Sós, Budapest, 1991), 239–263.

[ES] P. Erdős and M. Simonovits: A limit theorem in graph theory, *Studia Sci. Math. Hungar.* **1** (1966) 51–57, (reprinted in the Art of Counting, MIT PRESS, 1973, pp. 194–200).

[ES2] P. Erdős and M. Simonovits: Supersaturated graphs and hypergraphs, *Combinatorica,* **3(2)** (1983), 181–192.

[Gy1] E. Győri, On the number of edge disjoint triangles in graphs of given size, *Combinatorics,* Proc. 7th Hungarian Combinatorial Coll., Eger (Hungary), 1987, 267–276.

[Gy2] E. Győri, Note on the maximum number ofC_5's in a triangle-free graph, *Combinatorica,* **9** (1989) 101–102.

[Gy3] E. Győri, On the number of edge disjoint cliques in graphs of given size, *Combinatorica,* **11** (1991), 231–243.

[Gy4] E. Győri, Edge disjoint cliques in graphs, *Sets, Graphs and Numbers* (Proc. of the Coll. ded. to the 60th birthday of A. Hajnal and V. T. Sós, Budapest, 1991), 357–363.

[GyK] E. Győri, A. V. Kostochka, On a problem of G. O. H. Katona and T. Tarján, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **34** (1979) 321–327.

[GyT] E. Győri, Zs. Tuza, Decomposition of graphs into complete subgraphs of given order, *Studia Sci. Math. Hung.,* **22** (1987) 315–320.

[HSz] A. Hajnal, E. Szemerédi, Proof of a conjecture of Erdős, *Combinatorial Theory and its Applications,* Coll. Math. Soc. Bolyai, 1970, 601–623.

[K] J. Kahn, Proof of a conjecture of Katona and Tarján, *Periodica Math. Hung.,* **12** (1981) 81–82.

[LT] J. Lehel, Zs. Tuza, Triangle-free partial graphs and edge covering theorems, *Discrete Math.* **39** (1982) 59–65.

[LS] L. Lovász and M. Simonovits, On the number of complete subgraphs of a graph II, *Studies in Pure Mathematics,* To the memory of Paul Turán (ed. P. Erdős, L. Alpár, G. Halász, etc.), 1983, Akad. Kiadó, 459–495.

[M] W. Mantel, Problem 28, sol by H. Gouwentak, W. Mantel, J. Teixera de Mattes, F. Schuh and W. A. Wythoff, *Wiskundige Opgaven* **10** (1907), 60–61.

[Py1] L. Pyber, Clique covering of graphs, *Combinatorica* **6** (1986), 393–398.

[Py2] L. Pyber, Covering the edges of a graph by ..., *Sets, Graphs and Numbers* (Proc. of the Coll. ded. to the 60th birthday of A. Hajnal and V. T. Sós, Budapest, 1991), 583–610.

[Sa] N. Sauer, A generalization of a theorem of Turán, *J. Comb. Th. Ser B,* (1971), 109–112.

[S1] M. Simonovits: A method for solving extremal problems in graph theory, *Theory of graphs,* Proc. Coll. Tihany, (1966), (Ed. P. Erdős and G. Katona) Acad. Press, N.Y., (1968) pp. 279–319.

[S2] M. Simonovits: Extremal Graph Theory, *Selected Topics in Graph Theory* (ed. by Beineke and Wilson) Academic Press, London, New York, San Francisco, pp. 161–200. (1983)

[S3] M. Simonovits: Extremal graph problems with conditions, *Combinatorial Theory and its applications,* Proc. Coll. Math. Soc. J. Bolyai, Balatonfüred (1969), 999–1011.

[Sz] E. Szemerédi: On regular partitions of graphs, *Problemes Combinatoires et Théorie des Graphes* (ed. J. Bermond et al.), Orsay, 1976, CNRS Paris, 1978, pp. 399–401.

[T1] Turán P.: Egy gráfelméleti szélsőérték feladatról, *Mat. Fiz. Lapok,* **48** (1941), 436–452.

[T2] P. Turán, On the theory of graphs, *Colloq. Math.* **3** (1954) 19–30.

[Zy] A. A. Zykov: On some properties of linear complexes, *Mat. Sbornik,* **24** (1949) 163–188, *Amer. Math. Soc. Translations* No 79. 1952.

Ervin Győri: Quantitative extremal graph problems on cliques and cycles

The classical theorems of extremal graph theory say that if a graph G of n vertices has more than $f(n)$ edges then the graph contains a graph F as a subgraph and usually, we have full description of the structure of the typically unique extremal graphs of n vertices and $f(n)$ edges not containing the forbidden graph F as a subgraph. In this survey paper, we study another type of extremal graph theory problems what we call quantitative extremal graph problems. We do not investigate the edge number when F necessarily appears a subgraph, rather we investigate when a drastical jump happens to the number of (edge disjoint) copies of F. Or conversely, under some conditions, what graph contains the maximum number of copies of a given graph F. Furthermore, we study the decompositions of the edge set of graphs into edge disjoint copies of some types of graphs F. In every case, the graphs F will be cliques or cycles.

KÖNYVISMERTETÉS

A. Kawauchi: A Survey of Knot Theory
Birkhäuser, 1996; 420 old.

A 3-dimenziós euklideszi térbe beágyazott körvonalat csomónak nevezzük; két csomót pedig azonos típusúnak mondunk, ha a befoglaló térnek van olyan autohomeomorfizmusa (azaz önmagára képező folytonos egy-egyértelmű leképezése, melynek inverze is folytonos), mely az egyik csomót a másikba viszi.

A csomók matematikai tanulmányozása századunk elején kezdődött, s az akkori kezdeti sikerek után sokáig nem történt komoly előrehaladás. Erre a 80-as évek végéig kellett várni, de még ez a — Jones, Witten, s később Vasziljev nevével fémjelzett — áttörés sem oldotta meg a csomóelmélet fő problémáját: a csomók osztályozását. Érdemes megjegyezni, hogy az új eredményeket nemegyszer *modern elméleti fizikai* meggondolások motiválták.

A. Kawauchi könyvének 16 fejezete csaknem teljes összefoglalását adja a ma ismert csomó-invariánsok elméletének. Az alapfogalmak, konstrukciók és egy bizonyos „prímfaktorizáció" bevezetése után a szerző rátér a klasszikus csomóelmélet fő vonulatára — a csomó komplementerének algebrai topológiai vizsgálatára. Ez elvezet a csomóra húzható felületek és a komplementer fundamentális csoportjának, valamint első homológiacsoportjának tanulmányozásához. A csomóról így nyert információt elkódoló invariáns — az Alexander-polinom — egy többváltozós variánsát a szerző több oldalról is megvilágítja.

Ezek után olvashatunk a csomóelméletben a 80-as évektől kezdve elért nagy áttörésekről: a Jones típusú (kvantum-) invariánsok valamint a szingularitáselméleti gyökerekkel rendelkező Vasziljev-invariánsok elméletéről. A Jones-polinomnak nemcsak az eredetei algebrai, hanem egy (Kaufmanntól származó) kombinatorikus leírását is tárgyalja a szerző.

A könyv fő része egy rövid kitekintéssel zárul, melyben csomók kobordizmusaival találkozunk és megérthetjük, hogy milyen akadályokba ütközik a standard tételek (eggyel) magasabb dimenziós „csomókra" való kiterjesztése.

A könyv szokatlanul nagy részét (közel felét) a függelékek és az irodalomjegyzék teszi ki. A legfontosabb (F) függelék kutatók számára igen fontos: a legegyszerűbb 2–3000 csomó legfontosabb invariánsainak (szimmetriák, numerikus, kombinatorikus invariánsok, Alexander-, bogozó- és Kauffmann-polinomok) áttekinthető táblázata. Ilyen sok csomó ilyen bőséges adattárával tudomásom szerint más könyv nem büszkélkedhet.

Hasonlóan bőséges (több, mint 100 oldalas!) az irodalomjegyzék, mely éppen ezért önmagában nehezen, viszont a fejezetek végén adott útmutatóval együtt könnyen használható.

Kawauchi könyvét rendkívül hasznosnak találom csomóelméleti kutatók számára, de az elméletet tanulni vágyó olvasó is — néhány fejezetet (ahol a nagyfokú általánosság miatt első olvasásra nehezen érthető meg a lényeg) kihagyva — sikerrel forgathatja.

Rimányi Richárd

Berezansky, Y. M. – Sheftel, Z. G. – Us, G. F.: Functional Analysis Vol I.–II., Basel–Boston–Berlin, Birkhauser Verlag, 1996

Az Operator Theory, Advances and Applications című sorozat 85. és 86. köteteként jelent meg a kijevi és csernigovi egyetem professzorainak oroszból angolba lefordított könyve. A világon több hasonló című könyv van forgalomban és úgy gondolom, hogy a kiadó azért jelentette meg ezt a munkát, hogy az oroszul nem tudók számára is ajánlhassa ezt az alapvető, a legegyszerűbb fogalmakat és ismereteket is, továbbá a sok speciális elméletet és alkalmazást is tartalmazó, átfogó, ugyanakkor világosan, érthetően megírt könyvet.

Az első kötet, amely a funkcionálanalízis bevezető önálló tankönyve lehetne, két részre oszlik. Az első öt fő fejezet a klasszikus mértékelmélet és az integrálelmélet részletes tárgyalásából áll és felépítése Halmos illetve Natanszon világhírű könyvei tárgyalásmódjának ötvözete. A második részbe az 5–11. fejezetek sorolhatók, amelyekből az 5–10. fejezetek a Banach és Hilbert terek klasszikus elméletének alapjait, valamint a különféle operátorokat mutatják be. A 11. fejezet az általánosított függvények elméletét tárgyalja.

A második kötet a funkcionálanalízis sajátos alkalmazási területeiről szól és egy-egy fejezet akár egy-egy speciálkollégium anyaga is lehetne. Néhány fejezetcím: A nemkorlátos operátorok általános elmélete Hilbert-terekben; Különböző típusú operátorok spektrálfelbontása: Felbontás általánosított sajátvektorok szerint; Differenciáloperátorok.

Sok alfejezet végén gyakorló feladatok találhatók (megoldás nélkül).

Mind a két kötet végén rendkívül részletes irodalomjegyzék van és a hozzá fűzött megjegyzésekben pedig arra is eligazítást adnak a szerzők, hogy a nem részletezett vagy nem említett fogalmak, tételek, ismeretek hol találhatók meg részletesebben.

A könyvet felsőbb éves matematika, fizika, mérnök szakos hallgatók, doktoranduszok, kutatók és felsőoktatási intézmények oktatói használhatják munkájukhoz.

Scharnitzky Viktor

Brian Conolly – Steven Vajda: A Mathematical Kaleidoscope
Albion Publ., 1995, Chichester

Minden matematikusnak vannak kedvenc témái, ezeken belül kedvenc példái és feladatai; ezek lehetnek örökölt, többé-kevésbé ismert feladatok és lehetnek vadonatújak. Kedvenc feladatait a matematikus gondosan megőrzi, alkalomadtán előadja és ha talál rá kiadót, könyv alakban is megjelenteti. Ez utóbbi szerencsés helyzetnek vagyunk haszonélvezői, mart kezünkben tarthatunk egy válogatott feladatgyűjteményt a hozzátartozó ismeretanyaggal, (vagy fordítva) amely egyes matematikai ismeretek korszerű alkalmazását mutatja be.

Íme a választott témák, amelyek egyszersmind az egyes nagyobb fejezetek címei is: Ötletek, Pénzügy, Játékok, Matematikai programozás, Kutatás, szoros követés és ésszerű találgatás, Szervezés és menedzsment, Matematikai fejtörők, Háromszöggeometria.

A hozzávaló ismeretek: Matematikai analízis, geometria, valószínűségszámítás, matematikai statisztika, kombinatorika, számelmélet, lineáris algebra, informatika. Ez egyben azt is mutatja, hogy a matematika mely fejezeteinek tanulásához (tanításához) és alkalmazásához nyújthat segítséget a kötet. Külön meg kell említeni, hogy a bemutatott példák, különösen a korszerű témák feladatai, újak. A könyv tanulmányozásához középfokú matematikai ismeretek nem elegendőek.

A kötet szövege pontos, könnyen érthető, és nem mentes a humortól sem. Az egyes fejezetek végén közölt irodalomjegyzékek további tájékozódást tesznek lehetővé.

A kötetet a felsorolt témák bármelyikének tanulói és (a nem közismert feladatok okán) tanítói szíves figyelmébe ajánlom.

Scharnitzky Viktor

R. M. Johnson: Calculus. Introduction to Theory and Applications in Physical and Life Sciences
Albion Publishing, 1995, Chichester

A matematikai analízis tananyagát (pl. differenciál- és integrálszámítás vagy kalkulus címen) mindenütt a világon közel azonos módon és módszerekkel, egymáshoz nagyon hasonló tankönyvek (jegyzetek) segítségével tanítják. Az eltérés legfeljebb a tananyag részletezésében az összekötő szöveg mennyiségében, esetleg sorrendjében, a bemutatott példákban és a jelölésekben észlelhető, de ez a lényeget ritkán érinti.

A fellelhető könyvek túlnyomó többségének korrekt a szövege (nehéz elrontani ezt a 200 éves hagyományt) szokásosak a bemutatott példái és ábrái.

Egy ilyen lényegében hagyományos tankönyvet adott ki a skót Albion Publishing cég. Roy M. Johnson könyvét bárhol a világon haszonnal olvashatják az első éves egyetemi és főiskolai hallgatók (és oktatók), akik matematikai analízist tanulnak (tanítanak). A 14 fejezet témakörei a szokásosak: középiskolai matematikai ismeretek átismétlése, a függvények határértéke és differenciálása, függvények határozatlan és határozott integrálja, függvényvizsgálat, integrálási eljárások, az exponenciális és a logaritmus függvények, az integrálszámítás alkalmazásai, integrálok közelítő kiszámítása, sorozatok, differenciálegyenletek. Amint ez a könyv felépítését pontosan követő felsorolás is mutatja, egyes elemi függvények bevezetése a differenciálás és integrálás sok szabályának megmutatása után történik, ezért ezen függvények differenciálására és integrálására későbbi fejezetekben vissza kell térni (új sorrend).

A címlapon is meghirdetett fizikai és természettudományos alkalmazások valóban szép számmal szerepelnek a kötetben. de magyar nyelven eddig soha meg nem jelent feladat kevés van közöttük.

A könyv szövege korrekt, egyszerű (az angolul még csak tanulók is megértik), önálló tanulásra alkalmas, kiállítása már-már pazarlóan áttekinthető, világos.

A hagyományos tankönyvnek hagyományos sajtóhibái is vannak: pl. a határozott integrálok közelítő kiszámítására ajánlott Simpson szabály hibás (278. o.) vagy pl. a szerző nevét a könyv borítólapján hibásan nyomtatták ki.

A kötet alkalmas arra, hogy az angol nyelven matematikai analízist tanulók bevezető tankönyve legyen és új feladatokat kereső oktatók forrásmunkája legyen.

Scharnitzky Viktor

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS